2016 年北京高考数学（文科）试卷与解析

1.已知集合 $A=\{x|2<x<4\}, B=\{x|x<3或x>5\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{x|2<x<5\}$　　B. $\{x|x<4或x>5\}$　　C. $\{x|2<x<3\}$　　D. $\{x|x<2或x>5\}$

【解析】C

2.复数 $\frac{1+2i}{2-i}=$（　　）

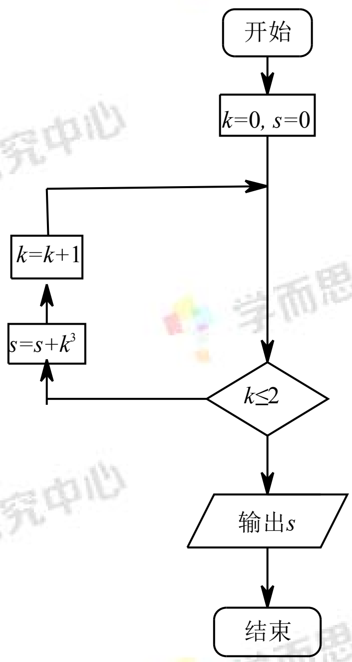
A. i　　B. 1+i　　C. $-i$　　D. $1-i$

【解析】A

$$\frac{(1+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{5i}{5}=i$$

3.执行如图所示的程序框图，输出的 s 值为（　　）

A.8　　B.9　　C.27　　D.36



【解析】B

$k=0,\ s=0$

$s=0, k=1$

$s=1, k=2$

$s=9, k=3$

4.下列函数中，在区间 $(-1,1)$ 上为减函数的是（　　）

A. $y=\frac{1}{1-x}$　　B. $y=\cos x$　　C. $\ln(x+1)$　　D. $y=2^{-x}$

【解析】D

由于函数 $y=2^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 是减函数，所以满足题意.

5.圆 $(x+1)^2+y^2=2$ 的圆心到直线 $y=x+3$ 的距离为（　　）

A.1　　B.2　　C.$\sqrt{2}$　　D.$2\sqrt{2}$

【解析】C

圆心为 $(-1,0)$ 到直线的距离为 $d=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

6.从甲、乙等 5 名学生中随机选出 2 人，则甲被选中的概率为(　　)

A.$\dfrac{1}{5}$　　B.$\dfrac{2}{5}$　　C.$\dfrac{8}{25}$　　D.$\dfrac{9}{25}$

【解析】B

$\dfrac{4}{C_5^2}=\dfrac{2}{5}$

7.已知 $A(2,5)$，$B(4,1)$.若点 $P(x,y)$ 在线段 AB 上，则 $2x-y$ 的最大值为(　　)

A.　-1　　B.3　　C.7　　D.8

【解析】C

过点 B 时 $2x-y$ 取最大值 7.

8. 某学校运动会的立定跳远和 30 秒跳绳两个单项比赛分成预赛和决赛两个阶段. 下表为 10 名学生的预赛成绩，其中有三个数据模糊.

学生序号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
立定跳远（单位：米）	1.96	1.92	1.82	1.80	1.78	1.76	1.74	1.72	1.68	1.60
30 秒跳绳（单位：次）	63	a	75	60	63	72	70	$a-1$	b	65

在这 10 名学生中，进入立定跳远决赛的有 8 人，同时进入立定跳远决赛和 30 秒跳绳决赛的有 6 人，则（　　）

A．2 号学生进入 30 秒跳绳决赛　　B．5 号学生进入 30 秒跳绳决赛

C．8 号学生进入 30 秒跳绳决赛　　D．9 号学生进入 30 秒跳绳决赛

【解析】B

由题意，$1\sim8$ 号学生进入跳远决赛，所以这 8 个学生中进入跳绳决赛的刚好有 6 人，若 5 号学生没进入决赛，则 1，4，5 号学生都没有进入决赛，矛盾. 所以 5 号学生必定进入决赛.

9.已知向量 $\vec{a}=\left(1,\sqrt{3}\right)$，$\vec{b}=\left(\sqrt{3},1\right)$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角的大小为__________.

【解析】$\dfrac{\pi}{6}$

$\because \vec{a}=\left(1,\sqrt{3}\right)$，$\vec{b}=\left(\sqrt{3},1\right)$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{\left(1,\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3},1\right)}{\sqrt{1+3}\times\sqrt{3+1}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\because \theta\in[0,\pi]$

$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{6}$

10.函数 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}(x\geqslant 2)$ 的最大值为_________.

【解析】2

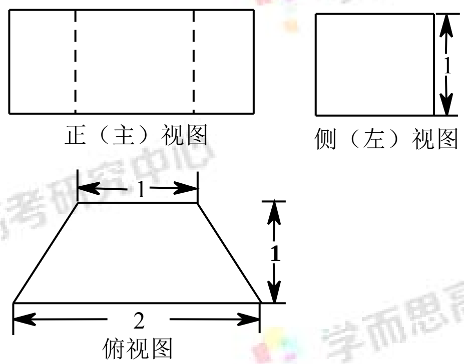
$f(x)=\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{x-1+1}{x-1}=1+\dfrac{1}{x-1}(x\geqslant 2)$

$\because \dfrac{1}{x-1}$ 在 $[2,+\infty)$ 上单调递减

$\therefore f(x)=1+\dfrac{1}{x-1}\leqslant 1+\dfrac{1}{2-1}=2$

即 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}(x\geqslant 2)$ 最大值为 2.

11.某四棱柱的三视图如图所示，则该四棱柱的体积为__________.



【解析】$\dfrac{3}{2}$

该四棱柱以梯形为底面，高为 1.

$\therefore V=S_{底}\cdot h=\dfrac{1}{2}(1+2)\times1\times1=\dfrac{3}{2}$

12.已知双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,\ b>0\right)$ 的一条渐近线为 $2x+y=0$，一个焦点为 $\left(\sqrt{5},\ 0\right)$，则 $a=$__________；$b=$____________.

【解析】1,2

∵双曲线的一条渐近线为 $2x+y=0$

∴ $\dfrac{b}{a}=2$ ①

又一个焦点为 $\left(\sqrt{5},\ 0\right)$

∴ $c=\sqrt{5}$ ②

由①②知 $a=1$， $b=2$.

13. 在 ΔABC 中， $\angle A=\dfrac{2\pi}{3}$， $a=\sqrt{3}c$， 则 $\dfrac{b}{c}=$____________.

【解析】1

∵ $\angle A=\dfrac{2\pi}{3}$， $a=\sqrt{3}c$

由正弦定理知 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{\sin A}{\sin C}=\sqrt{3}=\dfrac{\sin\dfrac{2\pi}{3}}{\sin C}$

∴ $\sin C=\dfrac{1}{2}$

∴ $C=\dfrac{\pi}{6}$

∴ $B=\dfrac{\pi}{6}$

∴ $\dfrac{b}{c}=\dfrac{\sin B}{\sin C}=1$

14．某网店统计了连续三天售出商品的种类情况：第一天售出 19 种商品，第二天售出 13 种商品，第三天售出 18 种商品；前两天都售出的商品有 3 种，后两天都售出的商品有 4 种，则该网店

①第一天售出但第二天未售出的商品有______种；

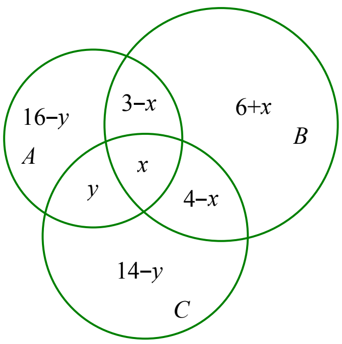
②这三天售出的商品最少有_______种.

【解析】16， 29

$19-3=16$；

设三天售出的商品种类分别构成集合 A，B，C， 则 $|A|=19$， $|B|=13$， $|C|=18$， 且 $|A\cap B|=3$， $|B\cap C|=4$，（ $|A|$ 表示 A 的元素个数）， 画出 Venn 图，

设 $\left|\complement_{A\cap C}\left(A\cap B\cap C\right)\right|=y$， 各个集合的元素个数如图所示.



则 $14-y\geqslant 0\Rightarrow y\leqslant 14$.

于是，$|A\cup B\cup C|=19+10+14-y\geqslant 19+10+14-14\geqslant 29$.

所以，这三天售出的商品最少有 29 种.

15.（本小题 13 分）

已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，$\{b_n\}$ 是等比数列，且 $b_2=3$，$b_3=9$，$a_1=b_1$，$a_{14}=b_4$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)设 $c_n=a_n+b_n$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和.

【解析】(1)设 $\{a_n\}$ 的公差为 d，$\{b_n\}$ 的公比为 q.

$\because b_2=3$，$b_3=9$

$\therefore q=\dfrac{b_3}{b_2}=3$

$\therefore a_1=b_1=\dfrac{b_2}{q}=1$，$a_{14}=b_4=b_1q^3=27$

$\therefore d=\dfrac{a_{14}-a_1}{13}=\dfrac{26}{13}=2$

$\therefore a_n=a_1+(n-1)d=1+2(n-1)=2n-1$

(2)由(1)知 $b_1=1$，$q=3$

$\therefore b_n=b_1q^{n-1}=3^{n-1}$

$\therefore c_n=a_n+b_n=2n-1+3^{n-1}$

设 $\{c_n\}$ 前 n 项和为 S_n，则

$$S_n=n+2\times\frac{n(n-1)}{2}+\frac{1-3^n}{1-3}=n^2+\frac{3^n-1}{2}.$$

16. （本小题 13 分）

已知函数 $f(x)=2\sin\omega x\cos\omega x+\cos 2\omega x(\omega>0)$ 的最小正周期为 π

(1)求 ω 的值

(2)求 $f(x)$ 的单调递增区间.

【解析】(1) $f(x)=\sin 2\omega x+\cos 2\omega x=\sqrt{2}\sin\left(2\omega x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

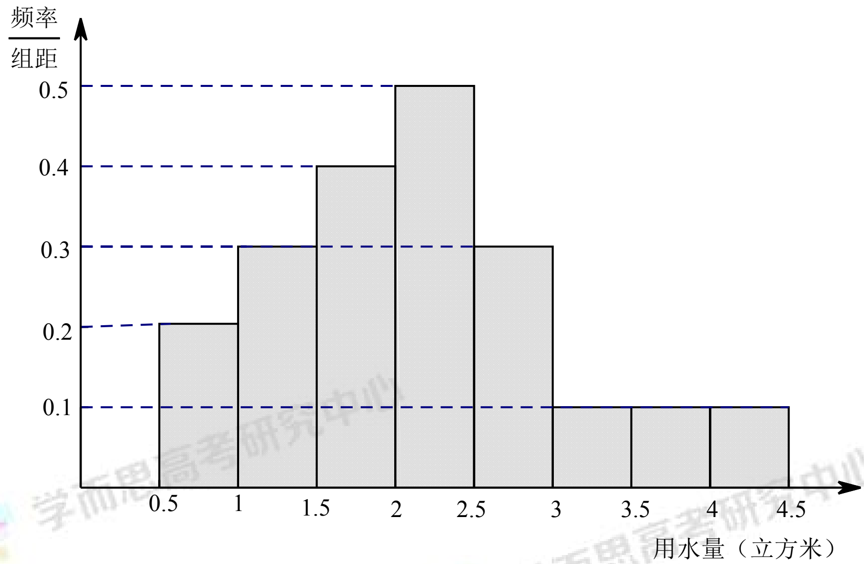
根据 $T=\dfrac{2\pi}{2\omega}=\pi$，所以 $\omega=1$

(2)由(1)知 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\{x\,|\,-\dfrac{3\pi}{8}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{8}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$

17.（本小题 13 分）

某市民用水拟实行阶梯水价，每人用水量中不超过 w 立方米的部分按 4 元/立方米收费，超出 w 立方米的部分按 10 元/立方米收费，从该市随机调查了 10000 位居民，获得了他们某月的用水量数据，整理得到如下频率分布直方图：



（1）如果 w 为整数，那么根据此次调查，为使 80% 以上居民在该月的用水价格为 4 元/立方米，w 至少定为多少？

（2）假设同组中的每个数据用该组区间的右端点值代替，当 $w=3$ 时，估计该市居民该月的人均水费.

【解析】(1) 将前五组的频数相加：$(0.2+0.3+0.4+0.5+0.3)\times0.5=0.85>0.8$，故 $w=3$.

(2)当 $w=3$ 时，

$(0.2\times0.5\times1+0.3\times0.5\times1.5+0.4\times0.5\times2+0.5\times0.5\times2.5+0.3\times0.5\times3)\times4=7.2$

$0.1\times0.5\times3\times4+0.1\times0.5\times0.5\times10=0.85$

$0.1\times0.5\times3\times4+0.1\times0.5\times1\times10=1.10$

$0.1\times0.5\times3\times4+0.1\times0.5\times1.5\times10=1.35$

该市居民该月的人均水费为 $7.20+0.85+1.10+1.35=10.5$.

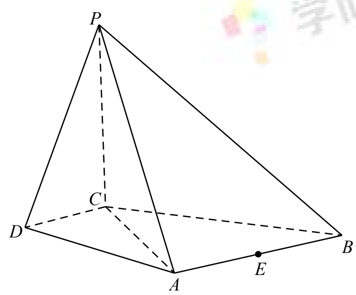
18.（本小题 14 分）

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PC\perp$ 平面 $ABCD$，$AB\parallel DC$，$DC\perp AC$.

(1)求证：$DC\perp$ 平面 PAC；

(2)求证：平面 $PAB\perp$ 平面 PAC；

(3)设点 E 为 AB 的中点，在棱 PB 上是否存在点 F，使得 $PA\parallel$ 平面 CEF？说明理由.



【解析】(1) $PC\perp$ 平面 $ABCD$，$CD\subset$ 平面 $ABCD$

所以 $PC\perp CD$

$DC\perp AC$，$PC\cap AC=C$

所以 $CD\perp$ 平面 PAC

⑵ $AB /\!/ CD$，所以 $AB \perp$ 平面 PAC

$AB \subset$ 平面 PAB

所以平面 $PAB \perp$ 平面 PAC

⑶存在

取 PB 的中点为 F，连接 FC, EF, EC

因为点 E 为的 AB 中点

则 $EF /\!/ PA$

而 $EF \subset$ 平面 CEF

$PA \not\subset$ 平面 CEF

则 $PA /\!/$ 平面 CEF

19.（本小题 14 分）

已知椭圆 $C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 过点 $A(2,0)$， $B(0,1)$ 两点.

⑴求椭圆 C 的方程及离心率；

⑵设 P 为第三象限内一点且在椭圆 C 上，直线 PA 与 y 轴交于点 M，直线 PB 与 x 轴交于点 N，求证：四边形 $ABNM$ 的面积为定值.

【解析】⑴ $a=2$， $b=1$

所以椭圆 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，离心率为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

⑵设 $M(0,y_M)$， $N(x_N,0)$，设 $P(x_0,y_0)$， $-2<x_0<0$， $-1<y_0<0$，

$\dfrac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$，即 $4y_0^2=4-x_0^2$

直线 PA 方程为： $y-0=\dfrac{y_0-0}{x_0-2}(x-2)$，令 $x=0$，得 $y_M=\dfrac{-2y_0}{x_0-2}$

直线 PB 方程为： $y-1=\dfrac{y_0-1}{x_0-0}(x-0)$，令 $y=0$，得 $x_N=\dfrac{-x_0}{y_0-1}$

四边形 $ABNM$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}|AN|\cdot|BM|$

$$\text{所以 } S=\frac{1}{2}\left|2+\frac{x_0}{y_0-1}\right|\cdot\left|1+\frac{2y_0}{x_0-2}\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{(2y_0-2+x_0)^2}{(y_0-1)(x_0-2)}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{4y_0^2+4+x_0^2-8y_0-4x_0+4x_0y_0}{x_0y_0-x_0-2y_0+2}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{4-x_0^2+4+x_0^2-8y_0-4x_0+4x_0y_0}{x_0y_0-x_0-2y_0+2}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{4x_0y_0-4x_0-8y_0+8}{x_0y_0-x_0-2y_0+2}\right|=2$$

所以四边形 $ABNM$ 面积为定值 2

20.（本小题 13 分）

设函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$

(1) 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

(2) 设 $a=b=4$，若函数 $f(x)$ 有三个不同零点，求 c 的取值范围；

(3) 求证：$a^2-3b>0$ 是 $f(x)$ 有三个不同零点的必要而不充分条件.

【解析】(1) $f'(x)=3x^2+2ax+b$，$f'(0)=b$，$f(0)=c$，所以切线方程为 $y=bx+c$.

(2) $f(x)=x^3+4x^2+4x+c$，$f'(x)=3x^2+8x+4=(3x+2)(x+2)$

当 $x<-2$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增；当 $-2<x<-\frac{2}{3}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>-\frac{2}{3}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增.

且 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\infty$；$x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$.

所以，只需 $f(-2)>0$，$f\left(-\frac{2}{3}\right)<0$，即

$$\begin{cases}-8+16-8+c>0\\ -\frac{8}{27}+\frac{16}{9}-\frac{8}{3}+c<0\end{cases}$$

解得 $0<c<\frac{32}{27}$.

(3) $f'(x)=3x^2+2ax+b$，若 $a^2-3b\leqslant 0$，则 $f'(x)\geqslant 0$ 恒成立，从而 $f(x)$ 单调递增，于是 $f(x)$ 最多只有1个零点. 所以，$a^2-3b>0$.

当 $a^2-3b>0$ 时，$f'(x)$ 有两个实根 $x_1<x_2$，$f(x)$ 在 x_1 取到极大值，在 x_2 取到极小值，若 $f(x_1)\leqslant 0$ 或者 $f(x_2)\geqslant 0$，则 $f(x)$ 没有 3 个零点.

比如，设 $f(x)=x^3-3x^2+2x-100$ 满足 $a^2-3b>0$，但没有三个不同零点.