2016年北京高考数学（理科）答案与解析

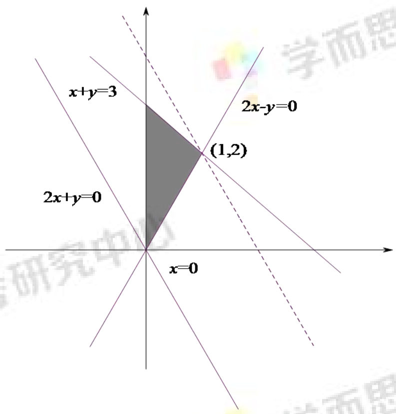
学而思高考研究中心—成文波、邓杨、邓一维、高杨凯钰、
韩晓东、哈茹雪、马佛青、问延炜、
吴承峰、吴一炯、王睿瑶、武洪姣、
杨连锋、张剑、赵铭雪

1. C

【解析】集合 $A=\{x|-2<x<2\}$，集合 $B=\{x|-1,0,1,2,3\}$，所以 $A\cap B=\{-1,0,1\}$.

2. C

【解析】可行域如图阴影部分，目标函数平移到虚线处取得最大值，对应的点为 $(1,2)$，最大值为 $2\times1+2=4$.



3. B

【解析】开始 $a=1$，$k=0$；第一次循环 $a=-\dfrac{1}{2}$，$k=1$；第二次循环 $a=-2$，$k=2$，第三次循环 $a=1$，条件判断为“是”跳出，此时 $k=2$.

4. D

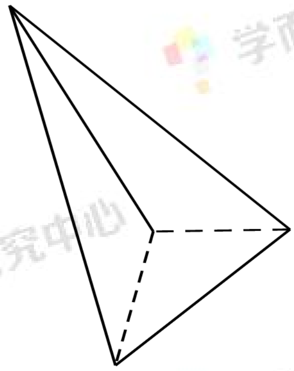
【解析】若 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ 成立，则以 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为边组成平行四边形，那么该平行四边形为菱形，$\vec{a}+\vec{b}$，$\vec{a}-\vec{b}$ 表示的是该菱形的对角线，而菱形的对角线不一定相等，所以 $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ 不一定成立，从而不是充分条件；反之，$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ 成立，则以 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为边组成平行四边形，则该平行四边形为矩形，矩形的邻边不一定相等，所以 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ 不一定成立，从而不是必要条件.

5．C

【解析】A.考查的是反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，所以 $\frac{1}{x}<\frac{1}{y}$ 即 $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}<0$ 所以 A 错； B.考查的是三角函数 $y=\sin x$ 在 $(0,+\infty)$ 单调性，不是单调的，所以不一定有 $\sin x>\sin y$，B 错；C.考查的是指数函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，所以有 $\left(\frac{1}{2}\right)^x<\left(\frac{1}{2}\right)^y$ 即 $\left(\frac{1}{2}\right)^x-\left(\frac{1}{2}\right)^y<0$ 所以 C 对；D 考查的是对数函数 $y=\ln x$ 的性质，$\ln x+\ln y=\ln xy$，当 $x>y>0$ 时，$xy>0$ 不一定有 $\ln xy>0$，所以 D 错.

6．A

【解析】通过三视图可还原几何体为如图所示三棱锥，则通过侧视图得高 $h=1$，底面积 $S=\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$，所以体积 $V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{6}$.



7．A

【解析】点 $P\left(\frac{\pi}{4},t\right)$ 在函数 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 上，所以 $t=\sin\left(2\times\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，然后 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$ 向左平移 s 个单位，即 $y=\sin\left(2(x+s)-\frac{\pi}{3}\right)=\sin 2x$，所以 $s=\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$，所以 s 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$.

另外，此题还可以考虑点 $P\left(\frac{\pi}{4},\frac{1}{2}\right)$ 向左平移 s 个单位后为 $P'\left(\frac{\pi}{4}-s,\frac{1}{2}\right)$，代入 $y=\sin 2x$ 得到 $y=\sin 2(\frac{\pi}{4}-s)=\frac{1}{2}$，所以 $s=-\frac{\pi}{6}+k\pi$ 或 $\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$，$s>0$ 所以 s 的最小值为 $\frac{\pi}{6}$.

8．B

【解析】取两个球往盒子中放有4种情况：

①红+红，则乙盒中红球数加1个；
②黑+黑，则丙盒中黑球数加1个；
③红+黑（红球放入甲盒中），则乙盒中黑球数加1个；
④黑+红（黑球放入甲盒中），则丙盒中红球数加1个.

因为红球和黑球个数一样，所以①和②的情况一样多，③和④的情况完全随机.
③和④对B选项中的乙盒中的红球与丙盒中的黑球数没有任何影响.

①和②出现的次数是一样的，所以对 B 选项中的乙盒中的红球与丙盒中的黑球数的影响次数一样.

综上，选 B.

9. -1

【解析】$(1+\mathrm{i})(a+\mathrm{i})=a-1+(a+1)\mathrm{i}$

∵其对应点在实轴上

∴ $a+1=0$，$a=-1$

10. 60

【解析】由二项式定理得含 x^2 的项为 $\mathrm{C}_6^2(-2x)^2=60x^2$

11. 2

【解析】将极坐标转化为直角坐标进行运算 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$

直线的直角坐标方程为 $x-\sqrt{3}y-1=0$

∵ $\rho=2\cos\theta$，$\rho^2\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)=2\rho\cos\theta$ ∴ $x^2+y^2=2x$

圆的直角坐标方程为 $(x-1)^2+y^2=1$

圆心 $(1,0)$ 在直线上，因此 AB 为圆的直径，$|AB|=2$

12. 6

【解析】∵ $a_3+a_5=2a_4$ ∴ $a_4=0$

∵ $a_1=6$，$a_4=a_1+3d$ ∴ $d=-2$

∴ $S_6=6a_1+\dfrac{6\times(6-1)}{2}d=6$

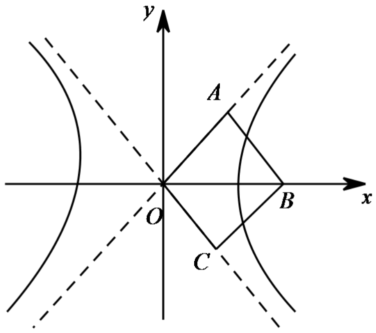
13. 2

【解析】不妨令 B 为双曲线的右焦点，A 在第一象限，则双曲线图象如图

∵ $OABC$ 为正方形，$|OA|=2$ ∴ $c=|OB|=2\sqrt{2}$，$\angle AOB=\dfrac{\pi}{4}$

∵直线 OA 是渐近线，方程为 $y=\dfrac{b}{a}x$，∴ $\dfrac{b}{a}=\tan\angle AOB=1$

又∵ $a^2+b^2=c^2=8$ ∴ $a=2$



14．2，$a<-1$．

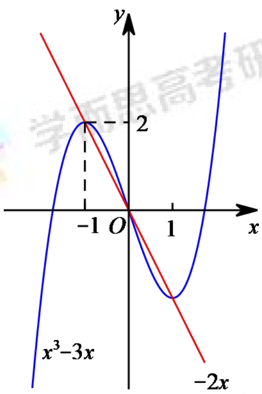
【解析】由 $\left(x^3-3x\right)'=3x^2-3=0$，得 $x=\pm1$，如下图，是 $f\left(x\right)$ 的两个函数在没有限制条件时的图象．

(1) $f\left(x\right)_{\max}=f\left(-1\right)=2$；

(2) 当 $a\geqslant-1$ 时，$f\left(x\right)$ 有最大值 $f\left(-1\right)=2$；

当 $a<-1$ 时，$-2x$ 在 $x>a$ 时无最大值，且 $-2a>\left(x^3-3x\right)_{\max}$．

所以，$a<-1$．



15．

【解析】(1) $\because a^2+c^2=b^2+\sqrt{2}ac$

$\therefore a^2+c^2-b^2=\sqrt{2}ac$

$\therefore \cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\dfrac{\sqrt{2}ac}{2ac}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \angle B=\dfrac{\pi}{4}$

(2) $\because A+B+C=\pi$

$\therefore A+C=\dfrac{3}{4}\pi$

$\therefore \sqrt{2}\cos A+\cos C$

$=\sqrt{2}\cos A+(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos A)+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin A$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos A+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin A=\sin(A+\dfrac{\pi}{4})$

$\because A+C=\frac{3}{4}\pi$

$\therefore A\in(0,\frac{3}{4}\pi)$

$\therefore A+\frac{\pi}{4}\in(\frac{\pi}{4},\pi)$

$\therefore \sin(A+\frac{\pi}{4})$ 最大值为 1

上式最大值为 1

16.

【解析】(1) $\frac{8}{20}\times 100=40$，C 班学生 40 人

(2)在 A 班中取到每个人的概率相同均为 $\frac{1}{5}$

设 A 班中取到第 i 个人事件为 A_i，$i=1,2,3,4,5$

C 班中取到第 j 个人事件为 C_j，$j=1,2,3,4,5,6,7,8$

A 班中取到 $A_i>C_j$ 的概率为 P_i

所求事件为 D

则 $P(D)=\frac{1}{5}P_1+\frac{1}{5}P_2+\frac{1}{5}P_3+\frac{1}{5}P_4+\frac{1}{5}P_5$

$=\frac{1}{5}\times\frac{2}{8}+\frac{1}{5}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{5}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{5}\times\frac{3}{8}+\frac{1}{5}\times\frac{4}{8}$

$=\frac{3}{8}$

(3) $\mu_1<\mu_0$

三组平均数分别为 7，9，8.25，总均值 $\mu_0=8.2$

但 μ_1 中多加的三个数据 7，9，8.25，平均值为 8.08，比 μ_0 小，

故拉低了平均值

17.

【解析】(1) $\because$ 面 $PAD\cap$ 面 $ABCD=AD$

面 $PAD\perp$ 面 $ABCD$

$\because AB\perp AD$，$AB\subset$ 面 $ABCD$

$\therefore AB\perp$ 面 PAD

$\because PD\subset$ 面 PAD

$\therefore AB\perp PD$

又 $PD\perp PA$

$\therefore PD\perp$ 面 PAB

(2)取 AD 中点为 O，连结 CO，PO

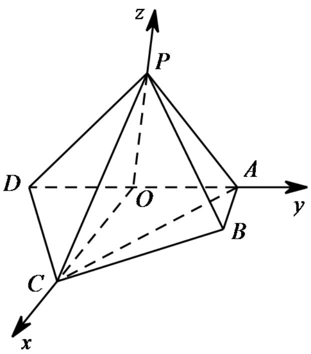
$\because CD=AC=\sqrt{5}$

$\therefore CO\perp AD$

$\because PA=PD$

$\therefore PO\perp AD$

以 O 为原点，如图建系



易知 $P(0,0,1)$，$B(1,1,0)$，$D(0,-1,0)$，$C(2,0,0)$，

则 $\overrightarrow{PB}=(1,1,-1)$，$\overrightarrow{PD}=(0,-1,-1)$，$\overrightarrow{PC}=(2,0,-1)$，

$\overline{CD}=(-2,-1,0)$

设 $\vec{n}$ 为面 PDC 的法向量，令 $\vec{n}=(x_0，y_0,1)$

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overline{PD}=0\\ \vec{n}\cdot\overline{PC}=0\end{cases}\Rightarrow\vec{n}=\left(\frac{1}{2},-1,1\right)$，则 PB 与面 PCD 夹角 θ 有

$$\sin\theta=\left|\cos<\vec{n},\overline{PB}>\right|=\left|\frac{\vec{n}\cdot\overline{PB}}{\left|\vec{n}\right|\left|\overline{PB}\right|}\right|=\left|\frac{\frac{1}{2}-1-1}{\sqrt{\frac{1}{4}+1+1}\times\sqrt{3}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

(3)假设存在 M 点使得 BM // 面 PCD

设 $\frac{AM}{AP}=\lambda$，$M\left(0,y',z'\right)$

由（2）知 $A\left(0,1,0\right)$，$P\left(0,0,1\right)$，$\overrightarrow{AP}=\left(0,-1,1\right)$，$B\left(1,1,0\right)$，$\overrightarrow{AM}=\left(0,y'-1,z'\right)$

有 $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AP}\Rightarrow M\left(0,1-\lambda,\lambda\right)$

∴ $\overrightarrow{BM}=\left(-1,-\lambda,\lambda\right)$

∵ BM // 面 PCD，$\vec{n}$ 为 PCD 的法向量

∴ $\overrightarrow{BM}\cdot\vec{n}=0$

即 $-\frac{1}{2}+\lambda+\lambda=0$

∴ $\lambda=\frac{1}{4}$

∴综上，存在 M 点，即当 $\frac{AM}{AP}=\frac{1}{4}$ 时，M 点即为所求.

18.

【解析】（I）∵ $f(x)=xe^{a-x}+bx$

∴ $f'(x)=e^{a-x}-xe^{a-x}+b=(1-x)e^{a-x}+b$

∵曲线 $y=f(x)$ 在点 $(2,f(2))$ 处的切线方程为 $y=(e-1)x+4$

∴ $f(2)=2(e-1)+4$，$f'(2)=e-1$

即 $f(2)=2e^{a-2}+2b=2(e-1)+4$ ①

$f'(2)=(1-2)e^{a-2}+b=e-1$ ②

由①②解得：$a=2$，$b=e$

（II）由（I）可知：$f(x)=xe^{2-x}+ex$，$f'(x)=(1-x)e^{2-x}+e$

令 $g(x)=(1-x)e^{2-x}$，

∴ $g'(x)=-e^{2-x}-(1-x)e^{2-x}=(x-2)e^{2-x}$

x	$(-\infty,2)$	2	$(2,+\infty)$
$g'(x)$	−	0	+
$g(x)$	↘	极小值	↗

∴ $g(x)$ 的最小值是 $g(2)=(1-2)e^{2-2}=-1$

∴ $f'(x)$ 的最小值为 $f'(2)=g(2)+e=e-1>0$

即 $f'(x)>0$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 恒成立

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增，无减区间.

19.

【解析】(1)由已知，$\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}ab=1$，又 $a^2=b^2+c^2$，

解得 $a=2,b=1,c=\sqrt{3}$.

∴椭圆的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

(2)方法一：

设椭圆上一点 $P(x_0,y_0)$，则 $\dfrac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$.

直线 PA：$y=\dfrac{y_0}{x_0-2}(x-2)$，令 $x=0$，得 $y_M=\dfrac{-2y_0}{x_0-2}$.

$\therefore |BM|=\left|1+\dfrac{2y_0}{x_0-2}\right|$

直线 PB：$y=\dfrac{y_0-1}{x_0}x+1$，令 $y=0$，得 $x_N=\dfrac{-x_0}{y_0-1}$.

$\therefore |AN|=\left|2+\dfrac{x_0}{y_0-1}\right|$

$$\begin{aligned}|AN|\cdot|BM|&=\left|2+\frac{x_0}{y_0-1}\right|\cdot\left|1+\frac{2y_0}{x_0-2}\right|\\&=\left|\frac{x_0+2y_0-2}{x_0-2}\right|\cdot\left|\frac{x_0+2y_0-2}{y_0-1}\right|\\&=\left|\frac{x_0^2+4y_0^2+4x_0y_0-4x_0-8y_0+4}{x_0y_0-x_0-2y_0+2}\right|\end{aligned}$$

将 $\dfrac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$ 代入上式得 $|AN|\cdot|BM|=4$

故 $|AN|\cdot|BM|$ 为定值.

方法二：

设椭圆 上一点 $P(2\cos\theta,\sin\theta)$，

直线 PA: $y=\dfrac{\sin\theta}{2\cos\theta-2}(x-2)$，令 $x=0$，得 $y_M=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$.

$\therefore |BM| = \left|\dfrac{\sin\theta+\cos\theta-1}{1-\cos\theta}\right|$

直线 PB : $y=\dfrac{\sin\theta-1}{2\cos\theta}x+1$, 令 $y=0$，得 $x_N=\dfrac{2\cos\theta}{1-\sin\theta}$.

$\therefore |AN| = \left|\dfrac{2\sin\theta+2\cos\theta-2}{1-\sin\theta}\right|$

$$|AN|\cdot|BM| = \left|\frac{2\sin\theta+2\cos\theta-2}{1-\sin\theta}\right|\cdot\left|\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{1-\cos\theta}\right|$$
$$=2\left|\frac{2-2\sin\theta-2\cos\theta+2\sin\theta\cos\theta}{1-\sin\theta-\cos\theta+\sin\theta\cos\theta}\right|$$
$$=4$$

故 $|AN|\cdot|BM|$ 为定值.

20.

【解析】(1) $G(A)=\{2,5\}$

(2) 因为存在 $a_n>a_1$，设数列 A 中第一个大于 a_1 的项为 a_k，则 $a_k>a_1\geqslant a_i$，其中 $2\leqslant i\leqslant k-1$，所以 $k\in G(A)$，$G(A)\neq\varnothing$.

(3) 设 A 数列的所有“G 时刻”为 $i_1<i_2<\cdots<i_k$，

对于第一个“G 时刻” i_1，有 $a_{i_1}>a_1\geqslant a_i$，$i=2,3,\cdots,i_1-1$，则 $a_{i_1}-a_1\leqslant a_{i_1}-a_{i_1-1}\leqslant 1$.

对于第二个“G 时刻” $i_2(>i_1)$，有 $a_{i_2}>a_{i_1}\geqslant a_i$（$i=1,2,\cdots,i_2-1$）.

则 $a_{i_2}-a_{i_1}\leqslant a_{i_2}-a_{i_2-1}\leqslant 1$.

类似的 $a_{i_3}-a_{i_2}\leqslant 1$，…，$a_{i_k}-a_{i_{k-1}}\leqslant 1$.

于是，$k\geqslant\left(a_{i_k}-a_{i_{k-1}}\right)+\left(a_{i_{k-1}}-a_{i_{k-2}}\right)+\cdots+\left(a_{i_2}-a_{i_1}\right)+\left(a_{i_1}-a_1\right)=a_{i_k}-a_1$.

对于 a_N，若 $N\in G(A)$，则 $a_{i_k}=a_N$；

若 $N\notin G(A)$，则 $a_N\leqslant a_{i_k}$，否则由(2)，知 $a_{i_k}, a_{i_k+1},\cdots,a_N$ 中存在“G 时刻”，与只有 k 个“G 时刻”矛盾.

从而，$k\geqslant a_{i_k}-a_1\geqslant a_N-a_1$，证毕.