爱智康 高考研究中心 高中数学 张勇凯 桑和瑞 何军凤 闫泓水

# 2016 年普通高等学校招生全国统一考试（江苏卷）

## 数学 I

参考公式：

样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的方差 $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2$，其中 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ .

棱柱的体积 $V=Sh$，其中 $S$ 是棱柱的底面积，$h$ 是高.

棱锥的体积 $V=\frac{1}{3}Sh$，其中 $S$ 是棱锥的底面积，$h$ 为高.

**一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共计 70 分．请把答案填写在答题卡相应位置上．**

1. 已知集合 $A=\{-1,2,3,6\}$，$B=\{x|-2<x<3\}$，则 $A\cap B=$____________.

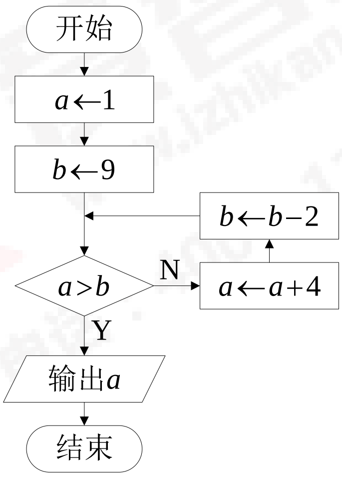
2. 复数 $z=(1+2\mathrm{i})(3-\mathrm{i})$，其中 i 为虚数单位，则 $z$ 的实部是____________.

3. 在平面直角坐标系 $xOy$ 中，双曲线 $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{3}=1$ 的焦距是____________.

4. 已知一组数据 4.7，4.8，5.1，5.4，5.5，则该组数据的方差是____________.

5. 函数 $y=\sqrt{3-2x-x^2}$ 的定义域是____________.

6. 如图是一个算法的流程图，则输出 $a$ 的值是____________.

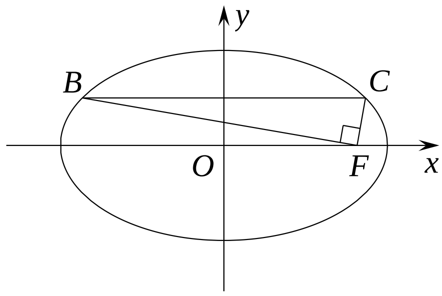



7. 将一个质地均匀的骰子（一种各个面上分别标有 $1,2,3,4,5,6$ 个点为正方体玩具）先后抛掷 2 次，则出现向上的点数之和小于 10 的概率是____________.

8. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，$S_n$ 是其前 $n$ 项和．若 $a_1+a_2^2=-3$，$S_5=10$，则 $a_9$ 的值是____________.

9. 定义在区间 $[0,3\pi]$ 上的函数 $y=\sin 2x$ 的图象与 $y=\cos x$ 的图象的交点个数是____________.

10. 如图，在平面直角坐标系 $xOy$ 中，$F$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点，直线 $y=\frac{b}{2}$ 与椭圆交于 $B,C$ 两点，且 $\angle BFC=90°$，则该椭圆的离心率是____________.

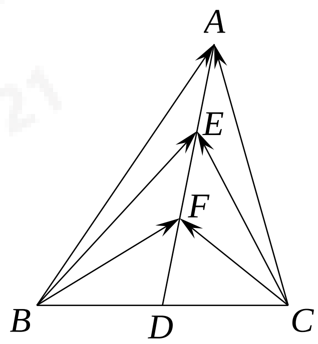



11. 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 2 的函数，在区间 $[-1,1)$ 上 $f(x)=\begin{cases} x+a, & -1\le x<0, \\ \left|\dfrac{2}{5}-x\right|, & 0\le x<1, \end{cases}$

其中 $a\in\mathbf{R}$，若 $f\left(-\dfrac{5}{2}\right)=f\left(\dfrac{9}{2}\right)$，则 $f(5a)$ 的值是__________.

12. 已知实数 $x,y$ 满足 $\begin{cases} x-2y+4\ge 0, \\ 2x+y-2\ge 0, \\ 3x-y-3\le 0, \end{cases}$ 则 $x^2+y^2$ 的取值范围是__________.

13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，$D$ 是 $BC$ 的中点，$E,F$ 是 $AD$ 上两个三等分点，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=4$，$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=-1$，则 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}$ 的值是__________.




14. 在锐角三角形 $ABC$ 中，$\sin A=2\sin B\sin C$，则 $\tan A\tan B\tan C$ 的最小值是__________.

**二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明，证明过程或演算步骤．**

15. （本小题满分 14 分）

在 $\triangle ABC$ 中，$AC=6$，$\cos B=\dfrac{4}{5}$，$C=\dfrac{\pi}{4}$.

(1) 求 $AB$ 的长；

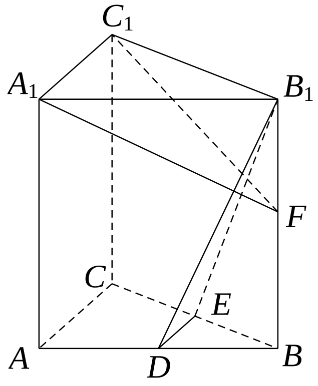
(2) 求 $\cos\left(A-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的值.

16. （本小题满分 14 分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$D,E$ 分别为 $AB,BC$ 的中点，点 $F$ 在侧棱 $B_1B$ 上，且 $B_1D\perp A_1F$，$A_1C_1\perp A_1B_1$．

求证：(1) 直线 $DE$ // 平面 $A_1C_1F$；

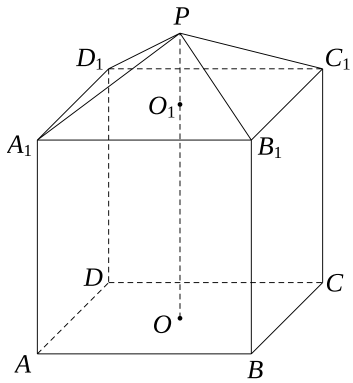
(2) 平面 $B_1DE\perp$ 平面 $A_1C_1F$．



17. （本小题满分 14 分）现需要设计一个仓库，它由上下两部分组成，上部分的形状是正四棱锥 $P-A_1B_1C_1D_1$，下部分的形状是正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$（如图所示），并要求正四棱柱的高 $O_1O$ 是正四棱锥的高 $PO_1$ 的 4 倍.

(1) 若 $AB=6\text{ m}$，$PO_1=2\text{ m}$，则仓库的容积是多少；

(2) 若正四棱锥的侧棱长为 $6\text{ m}$，当 $PO_1$ 为多少时，仓库的容积最大？



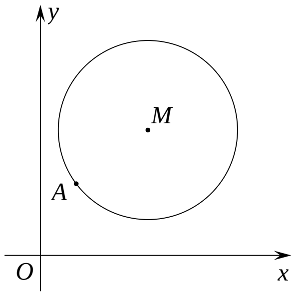
18. （本小题满分 14 分）

如图，在平面直角坐标系 $xOy$ 中，已知以 $M$ 为圆心的圆 $M$：$x^2+y^2-12x-14y+60=0$ 及其上一点 $A(2,4)$.

(1) 设圆 $N$ 与 $x$ 轴相切，与圆 $M$ 外切，且圆心 $N$ 在直线 $x=6$ 上，求圆 $N$ 的标准方程；

(2) 设平行于 $OA$ 的直线 $l$ 与圆 $M$ 相交于 $B,C$ 两点，且 $BC=OA$，求直线 $l$ 的方程；

(3) 设点 $T(t,0)$ 满足：存在圆 $M$ 上的两点 $P$ 和 $Q$，使得 $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{TQ}$，求实数 $t$ 的取值范围.



19. （本小题满分 14 分）

已知函数 $f\left(x\right)=a^{x}+b^{x}\left(a>0,b>0,a\neq1,b\neq1\right)$.

(1) 设 $a=2$，$b=\frac{1}{2}$.

① 求方程 $f\left(x\right)=2$ 的根；

② 若对于任意 $x\in\mathbf{R}$，不等式 $f\left(2x\right)\geqslant mf\left(x\right)-6$ 恒成立，求实数 $m$ 的最大值；

(2) 若 $0<a<1$，$b>1$，函数 $g\left(x\right)=f\left(x\right)-2$ 有且只有 1 个零点，求 $ab$ 的值.

20. （本小题满分 14 分）

记$U=\{1,2,\cdots,100\}$．对数列$\{a_n\}$（$n\in\mathbf{N}^*$）和$U$的子集$T$，若$T=\varnothing$，定义$S_T=0$；

若$T=\{t_1,t_2,\cdots,t_k\}$，定义$S_T=a_{t_1}+a_{t_2}+\cdots+a_{t_k}$．例如：$T=\{1,3,66\}$时，$S_T=a_1+a_3+a_{66}$．

现设$\{a_n\}$（$n\in\mathbf{N}^*$）是公比为3的等比数列，且当$T=\{2,4\}$时，$S_T=30$．

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 对任意正整数$k$（$1\leqslant k\leqslant 100$），若$T\subseteq\{1,2,\cdots,k\}$，求证：$S_T<a_{k+1}$；

(3) 设$C\subseteq U$，$D\subseteq U$，$S_C\geqslant S_D$，求证：$S_C+S_{C\cap D}\geqslant 2S_D$．

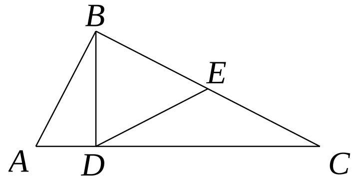
## 数学Ⅱ（附加题）

21．**[选做题]本题包括 A、B、C、D 四小题，请选定其中两小题，并在相应的答题区域内作答，若多做，则按作答的前两小题评分，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

A．[选修 4-1：几何证明选讲]（本小题满分 10 分）

如图，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=90^\circ$，$BD\perp AC$，$D$为垂足，$E$是$BC$中点.

求证：$\angle EDC=\angle ABD$.




B．[选修 4-2：矩阵与变换]（本小题满分 10 分）

已知矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & -2\end{bmatrix}$，矩阵$\boldsymbol{B}$的逆矩阵$\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\0 & 2\end{bmatrix}$，求矩阵$\boldsymbol{AB}$.

C．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（本小题满分 10 分）

在平面直角坐标系 $xOy$ 中，已知直线 $l$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+\dfrac{1}{2}t, \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t, \end{cases}$ $(t$ 为参数$)$，椭圆 $C$ 的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos\theta, \\ y=2\sin\theta, \end{cases}$ $(\theta$ 为参数$)$，设直线 $l$ 与椭圆 $C$ 相交于 $A,B$ 两点，求线段 $AB$ 的长.

D．[选修 4-5：不等式选讲]（本小题满分 10 分）

设 $a>0$，$|x-1|<\dfrac{a}{3}$，$|y-2|<\dfrac{a}{3}$，求证：$|2x+y-4|<a$.

**[必做题]第 22 题、第 23 题，每题 10 分，共计 20 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时写出文字说明、证明过程或演算步骤．**

22. （本小题满分 10 分）

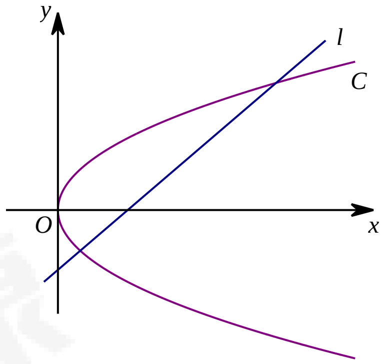
如图，在平面直角坐标系 $xOy$ 中，已知直线 $l: x-y-2=0$，抛物线 $C: y^2=2px\left(p>0\right)$.

⑴ 若直线 $l$ 过抛物线 $C$ 的焦点，求抛物线 $C$ 的方程；

⑵ 已知抛物线 $C$ 上存在关于直线 $l$ 对称的相异两点 $P$ 和 $Q$ .

①求证：线段 $PQ$ 上的中点坐标为 $\left(2-p,-p\right)$；

②求 $p$ 的取值范围.



23. （本小题满分 10 分）

⑴ 求 $7\mathrm{C}_6^3-4\mathrm{C}_7^4$ 的值；

⑵ 设 $m,n\in\mathbf{N}^*$，$n\geqslant m$，求证：$(m+1)\mathrm{C}_m^m+(m+2)\mathrm{C}_{m+1}^m+(m+3)\mathrm{C}_{m+2}^m+\cdots+n\mathrm{C}_{n-1}^m+(n+1)\mathrm{C}_n^m=(m+1)\mathrm{C}_{n+2}^{m+2}$．

**2016 年普通高等学校招生全国统一考试（江苏卷）参考答案**

**一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共计 70 分．**

1. $\{-1,2\}$；
2. 5；
3. $2\sqrt{10}$；
4. 0.1；
5. $[-3,1]$；
6. 9；
7. $\frac{5}{6}$；
8. 20；
9. 7；
10. $\frac{\sqrt{6}}{3}$；
11. $-\frac{2}{5}$；
12. $\left[\frac{4}{5},13\right]$；
13. $\frac{7}{8}$；
14. 8；

**二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分．**

15. (1) $\because \cos B=\frac{4}{5}$， $B$ 为三角形的内角

$\therefore \sin B=\frac{3}{5}$

$\because \frac{AB}{\sin C}=\frac{AC}{\sin B}$

$\therefore \frac{AB}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{6}{\frac{3}{5}}$，即： $AB=5\sqrt{2}$；

(2) $\cos A=-\cos(C+B)=\sin B\sin C-\cos B\cos C$

$\therefore \cos A=-\frac{\sqrt{2}}{10}$

又$\because A$为三角形的内角

$\therefore \sin A=\frac{7\sqrt{2}}{10}$

16. (1)$\because D,E$ 为中点， $\therefore DE$ 为 $\Delta ABC$ 的中位线

$\therefore DE // AC$

又$\because ABC-A_1B_1C_1$为棱柱，$\therefore AC // A_1C_1$

$\therefore DE // A_1C_1$，又$\because A_1C_1 \subset$平面$A_1C_1F$，且$DE \not\subset A_1C_1F$

$\therefore DE //$ 平面$A_1C_1F$；

(2) $\because ABC-A_1B_1C_1$为直棱柱，$\therefore AA_1 \perp$平面$A_1B_1C_1$

$\therefore AA_1 \perp A_1C_1$，又$\because A_1C_1 \perp A_1B_1$

且$AA_1 \cap A_1B_1 = A_1$，$AA_1, A_1B_1 \subset$平面$AA_1B_1B$

$\therefore A_1C_1 \perp$平面$AA_1B_1B$，

又$\because DE // A_1C_1$，$\therefore DE \perp$平面$AA_1B_1B$

又$\because A_1F \subset$平面$AA_1B_1B$，$\therefore DE \perp A_1F$

又$\because A_1F \perp B_1D$，$DE \cap B_1D = D$，且$DE, B_1D \subset$平面$B_1DE$

$\therefore A_1F \perp$平面$B_1DE$，又$\because A_1F \subset A_1C_1F$

$\therefore$平面$B_1DE \perp$平面$A_1C_1F$．

17. (1) $PO_1 = 2\text{ m}$，则$OO_1 = 8\text{ m}$，

$V_{P-A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot PO_1 = \frac{1}{3} \times 6^2 \times 2 = 24\text{ m}^3$，$V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD} \cdot OO_1 = 6^2 \times 8 = 288\text{ m}^3$，

$V = V_{P-A_1B_1C_1D_1} + V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} = 312\text{ m}^3$，

故仓库的容积为$312\text{ m}^3$；

(2) 设$PO_1 = x\text{ m}$，仓库的容积为$V(x)$

则$OO_1 = 4x\text{ m}$，$A_1O_1 = \sqrt{36-x^2}\text{ m}$，$A_1B_1 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{36-x^2}\text{ m}$，

$V_{P-A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot PO_1 = \frac{1}{3} \times \left(\sqrt{72-2x^2}\right)^2 \times x = \frac{1}{3}\left(72x-2x^3\right) = 24x - \frac{2}{3}x^3\text{ m}^3$，

$V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD} \cdot OO_1 = \left(\sqrt{72-2x^2}\right)^2 \times 4x = 288x - 8x^3\text{ m}^3$，

$V(x) = V_{P-A_1B_1C_1D_1} + V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} = 24x - \frac{2}{3}x^3 + 288x - 8x^3 = -\frac{26}{3}x^3 + 312x\,(0<x<6)$，

$V'(x) = -26x^2 + 312 = -26\left(x^2-12\right)\ (0<x<6)$，

当$x \in \left(0, 2\sqrt{3}\right)$时，$V'(x) > 0$，$V(x)$单调递增，

当$x \in \left(2\sqrt{3}, 6\right)$时，$V'(x) < 0$，$V(x)$单调递减，

因此，当$x = 2\sqrt{3}$时，$V(x)$取到最大值，

即$PO_1 = 2\sqrt{3}\text{ m}$时，仓库的容积最大．

18. (1)因为 $N$ 在直线 $x=6$ 上，设 $N(6,n)$，因为与 $x$ 轴相切，

则圆 $N$ 为 $(x-6)^2+(y-n)^2=n^2$， $n>0$

又圆 $N$ 与圆 $M$ 外切，圆 $M$： $(x-6)^2+(x-7)^2=25$，

则 $|7-n|=|n|+5$，解得 $n=1$，即圆 $N$ 的标准方程为 $(x-6)^2+(y-1)^2=1$；

(2) 由题意得 $OA=2\sqrt{5}$， $k_{OA}=2$ 设 $l:y=2x+b$，则圆心 $M$ 到直线 $l$ 的距离

$d=\dfrac{|12-7+b|}{\sqrt{2^2+1}}=\dfrac{|5+b|}{\sqrt{5}}$，

则 $BC=2\sqrt{5^2-d^2}=2\sqrt{25-\dfrac{(5+b)^2}{5}}$， $BC=2\sqrt{5}$，即 $2\sqrt{25-\dfrac{(5+b)^2}{5}}=2\sqrt{5}$，

解得 $b=5$ 或 $b=-15$，即 $l$： $y=2x+5$ 或 $y=2x-15$；

$\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{TQ}$，即 $\overrightarrow{TA}=\overrightarrow{TQ}-\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{PQ}$，即 $|\overrightarrow{TA}|=|\overrightarrow{PQ}|$，

$|\overrightarrow{TA}|=\sqrt{(t-2)^2+4^2}$，

又 $|\overrightarrow{PQ}|\leqslant 10$，

即 $\sqrt{(t-2)^2+4^2}\leqslant 10$，解得 $t\in\left[2-2\sqrt{21},2+2\sqrt{21}\right]$，

对于任意 $t\in\left[2-2\sqrt{21},2+2\sqrt{21}\right]$，欲使 $\overrightarrow{TA}=\overrightarrow{PQ}$，

此时 $|\overrightarrow{TA}|\le 10$，只需要作直线 $TA$ 的平行线，使圆心到直线的距离为 $\sqrt{25-\dfrac{|\overrightarrow{TA}|^2}{4}}$，

必然与圆交于 $P$、$Q$ 两点，此时 $|\overrightarrow{TA}|=|\overrightarrow{PQ}|$，即 $\overrightarrow{TA}=\overrightarrow{PQ}$，

因此对于任意 $t\in\left[2-2\sqrt{21},2+2\sqrt{21}\right]$，均满足题意，

综上 $t\in\left[2-2\sqrt{21},2+2\sqrt{21}\right]$.

19. (1)① $f(x)=2^x+\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$，由 $f(x)=2$ 可得 $2^x+\dfrac{1}{2^x}=2$，

则 $(2^x)^2-2\times 2^x+1=0$，即 $(2^x-1)^2=0$，则 $2^x=1$， $x=0$；

② 由题意得 $2^{2x}+\dfrac{1}{2^{2x}}\geqslant m\left(2^x+\dfrac{1}{2^x}\right)-6$ 恒成立，

令 $t=2^x+\dfrac{1}{2^x}$，则由 $2^x>0$ 可得 $t\geqslant 2\sqrt{2^x\times\dfrac{1}{2^x}}=2$，

此时 $t^2-2\geqslant mt-6$ 恒成立，即 $m\leqslant\dfrac{t^2+4}{t}=t+\dfrac{4}{t}$ 恒成立

$\because t\geqslant 2$ 时 $t+\dfrac{4}{t}\geqslant 2\sqrt{t\cdot\dfrac{4}{t}}=4$，当且仅当 $t=2$ 时等号成立，

因此实数 $m$ 的最大值为 $4$ .

(2) $g(x)=f(x)-2=a^x+b^x-2$，$g'(x)=a^x\ln a+b^x\ln b=a^x\ln b\left[\dfrac{\ln a}{\ln b}+\left(\dfrac{b}{a}\right)^x\right]$，

由 $0<a<1$，$b>1$ 可得 $\dfrac{b}{a}>1$，令 $h(x)=\left(\dfrac{b}{a}\right)^x+\dfrac{\ln a}{\ln b}$，则 $h(x)$ 递增，

而 $\ln a<0,\ln b>0$，因此 $x_0=\log_{\frac{b}{a}}\left(-\dfrac{\ln a}{\ln b}\right)$ 时 $h(x_0)=0$，

因此 $x\in(-\infty,x_0)$ 时，$h(x)<0$，$a^x\ln b>0$，则 $g'(x)<0$；

$x\in(x_0,+\infty)$ 时，$h(x)>0$，$a^x\ln b>0$，则 $g'(x)>0$；

则 $g(x)$ 在 $(-\infty,x_0)$ 递减，$(x_0,+\infty)$ 递增，因此 $g(x)$ 最小值为 $g(x_0)$，

① 若 $g(x_0)<0$，$x<\log_a 2$ 时，$a^x>a^{\log_a 2}=2$，$b^x>0$，则 $g(x)>0$；

$x>\log_b 2$ 时，$a^x>0$，$b^x>b^{\log_b 2}=2$，则 $g(x)>0$；

因此 $x_1<\log_a 2$ 且 $x_1<x_0$ 时，$g(x_1)>0$，因此 $g(x)$ 在 $(x_1,x_0)$ 有零点，

$x_2>\log$ 且 $x_2>x_0$ 时，$g(x_2)>0$，因此 $g(x)$ 在 $(x_0,x_2)$ 有零点，

则 $g(x)$ 至少有两个零点，与条件矛盾；

② 若 $g(x_0)\geq 0$，由函数 $g(x)$ 有且只有 1 个零点，$g(x)$ 最小值为 $g(x_0)$，

可得 $g(x_0)=0$，

由 $g(0)=a^0+b^0-2=0$，

因此 $x_0=0$，

因此 $\log_{\frac{b}{a}}\left(-\dfrac{\ln a}{\ln b}\right)=0$，即 $-\dfrac{\ln a}{\ln b}=1$，即 $\ln a+\ln b=0$，

因此 $\ln(ab)=0$，则 $ab=1$.

20. (1)当 $T=\{2,4\}$ 时，$S_T=a_2+a_4=a_2+9a_2=30$，因此 $a_2=3$，从而 $a_1=\dfrac{a_2}{3}=1$，$a_n=3^{n-1}$；

(2) $S_T\leqslant a_1+a_2+\cdots a_k=1+3+3^2+\cdots+3^{k-1}=\dfrac{3^k-1}{2}<3^k=a_{k+1}$；

(3) 设 $A=\complement_C(C\cap D)$，$B=\complement_D(C\cap D)$，则 $A\cap B=\varnothing$，$S_C=S_A+S_{C\cap D}$，$S_D=S_B+S_{C\cap D}$，$S_C+S_{C\cap D}-2S_D=S_A-2S_B$，因此原题就等价于证明 $S_A\geqslant 2S_B$ .

由条件 $S_C \geqslant S_D$ 可知 $S_A \geqslant S_B$ .

① 若 $B=\varnothing$，则 $S_B=0$，所以 $S_A \geqslant 2S_B$ .

② 若 $B\neq\varnothing$，由 $S_A \geqslant S_B$ 可知 $A\neq\varnothing$，设 $A$ 中最大元素为 $l$， $B$ 中最大元素为 $m$，

若 $m \geqslant l+1$，则由第(2)小题，$S_A < a_{l+1} \leqslant a_m \leqslant S_B$，矛盾.

因为 $A\cap B=\varnothing$，所以 $l\neq m$，所以 $l \geqslant m+1$，

$$S_B \leqslant a_1+a_2+\cdots+a_m = 1+3+3^2+\cdots+3^{m-1} = \frac{3^m-1}{2} < \frac{a_{m+1}}{2} \leqslant \frac{a_l}{2} \leqslant \frac{S_A}{2}，即 S_A > 2S_B .$$

综上所述，$S_A \geqslant 2S_B$，因此 $S_C + S_{C\cap D} \geqslant 2S_D$ .

## 数学Ⅱ（附加题）

21. [选做题]本题包括 A、B、C、D 四小题，请选定其中两小题，

A．[选修 4-1：几何证明选讲]（本小题满分 10 分）

解：由 $BD\perp AC$ 可得 $\angle BDC=90^\circ$，

由 $E$ 是 $BC$ 中点可得 $DE=CE=\frac{1}{2}BC$，

则 $\angle EDC=\angle C$，

由 $\angle BDC=90^\circ$ 可得 $\angle C+\angle DBC=90^\circ$，

由 $\angle ABC=90^\circ$ 可得 $\angle ABD+\angle DBC=90^\circ$，

因此 $\angle ABD=\angle C$，

又 $\angle EDC=\angle C$ 可得 $\angle EDC=\angle ABD$ .

B．[选修 4-2：矩阵与变换]（本小题满分 10 分）

解：$\boldsymbol{B}=\left(\boldsymbol{B}^{-1}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{2}{2} & \frac{\frac{1}{2}}{2} \\ \frac{0}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，因此 $\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}1 & 2 \\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \frac{5}{4} \\ 0 & -1\end{bmatrix}$.

C．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（本小题满分 10 分）

解：直线 $l$ 方程化为普通方程为 $\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$，

椭圆 $C$ 方程化为普通方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$，

联立得 $\begin{cases}\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0 \\ x^2+\frac{y^2}{4}=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=1 \\ y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=-\frac{1}{7} \\ y=-\frac{8\sqrt{3}}{7}\end{cases}$，

因此 $AB=\sqrt{\left(1+\frac{1}{7}\right)^2+\left(0+\frac{8\sqrt{3}}{7}\right)^2}=\frac{16}{7}$ .

D．[选修 4-5：不等式选讲]（本小题满分 10 分）

解：由$|x-1|<\frac{a}{3}$可得$|2x-2|<\frac{2a}{3}$，

$$|2x+y-4|\leqslant|2x-2|+|y-2|<\frac{2a}{3}+\frac{a}{3}=a.$$

[必做题]第 22 题、第 23 题，每题 10 分，共计 20 分.

22．解：(1)$\because l:x-y-2=0$，$\therefore l$ 与 $x$ 轴的交点坐标为$(2,0)$

即抛物线的焦点为$(2,0)$，$\therefore \frac{p}{2}=2$

$\therefore y^2=8x$；

(2)① 设点$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$

则：$\begin{cases} {y_1}^2=2px_1 \\ {y_2}^2=2px_2 \end{cases}$，即$\begin{cases} \frac{{y_1}^2}{2p}=x_1 \\ \frac{{y_2}^2}{2p}=x_2 \end{cases}$，$k_{PQ}=\dfrac{y_1-y_2}{\frac{{y_1}^2}{2p}-\frac{{y_2}^2}{2p}}=\dfrac{2p}{y_1+y_2}$

又$\because P,Q$关于直线$l$对称，$\therefore k_{PQ}=-1$

即$y_1+y_2=-2p$，$\therefore \frac{y_1+y_2}{2}=-p$

又$\because PQ$中点一定在直线$l$上

$\therefore \frac{x_1+x_2}{2}=\frac{y_1+y_2}{2}+2=2-p$

$\therefore$线段$PQ$上的中点坐标为$(2-p,-p)$；

② $\because$中点坐标为$(2-p,-p)$

$\therefore \begin{cases} y_1+y_2=-2p \\ x_1+x_2=\frac{{y_1}^2+{y_2}^2}{2p}=4-2p \end{cases}$ 即$\begin{cases} y_1+y_2=-2p \\ {y_1}^2+{y_2}^2=8p-4p^2 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} y_1+y_2=-2p \\ y_1y_2=4p^2-4p \end{cases}$，即关于$y^2+2py+4p^2-4p=0$有两个不等根

$\therefore \Delta>0$，$(2p)^2-4(4p^2-4p)>0$，$\therefore p\in\left(0,\frac{4}{3}\right)$.

23．解：(1)$7\mathrm{C}_6^3-4\mathrm{C}_7^4=7\times20-4\times35=0$；

(2)对任意的$m\in\mathbf{N}^*$，

① 当$n=m$时，左边$=(m+1)\mathrm{C}_m^m=m+1$，右边$=(m+1)\mathrm{C}_{m+2}^{m+2}=m+1$，等式成立，

② 假设 $n=k\left(k\geqslant m\right)$ 时命题成立，

即 $\left(m+1\right)\mathrm{C}_m^m+\left(m+2\right)\mathrm{C}_{m+1}^m+\left(m+3\right)\mathrm{C}_{m+2}^m+\cdots+k\mathrm{C}_{k-1}^m+\left(k+1\right)\mathrm{C}_k^m=\left(m+1\right)\mathrm{C}_{k+2}^{m+2}$，

当 $n=k+1$ 时，

左边=$\left(m+1\right)\mathrm{C}_m^m+\left(m+2\right)\mathrm{C}_{m+1}^m+\left(m+3\right)\mathrm{C}_{m+2}^m+\cdots+k\mathrm{C}_{k-1}^m+\left(k+1\right)\mathrm{C}_k^m+\left(k+2\right)\mathrm{C}_{k+1}^m$

$=\left(m+1\right)\mathrm{C}_{k+2}^{m+2}+\left(k+2\right)\mathrm{C}_{k+1}^m$，

右边 $=\left(m+1\right)\mathrm{C}_{k+3}^{m+2}$，

而 $\left(m+1\right)\mathrm{C}_{k+3}^{m+2}-\left(m+1\right)\mathrm{C}_{k+2}^{m+2}$，

$$=\left(m+1\right)\left[\frac{\left(k+3\right)!}{\left(m+2\right)!\left(k-m+1\right)!}-\frac{\left(k+2\right)!}{\left(m+2\right)!\left(k-m\right)!}\right]$$

$$=\left(m+1\right)\times\frac{\left(k+2\right)!}{\left(m+2\right)!\left(k-m+1\right)!}\left[k+3-\left(k-m+1\right)\right]$$

$$=\left(k+2\right)\frac{\left(k+1\right)!}{m!\left(k-m+1\right)!}$$

$$=\left(k+2\right)\mathrm{C}_{k+1}^m$$

因此 $\left(m+1\right)\mathrm{C}_{k+2}^{m+2}+\left(k+2\right)\mathrm{C}_{k+1}^m=\left(m+1\right)\mathrm{C}_{k+3}^{m+2}$，

因此左边=右边，

因此 $n=k+1$ 时命题也成立，

综合①②可得命题对任意 $n\geqslant m$ 均成立.

另解：因为 $\left(k+1\right)\mathrm{C}_k^m=\left(m+1\right)\mathrm{C}_{k+1}^{m+1}$，所以

左边 $=\left(m+1\right)\mathrm{C}_{m+1}^{m+1}+\left(m+1\right)\mathrm{C}_{m+2}^{m+1}+\cdots+\left(m+1\right)\mathrm{C}_{n+1}^{m+1}=\left(m+1\right)\left(\mathrm{C}_{m+1}^{m+1}+\mathrm{C}_{m+2}^{m+1}+\cdots+\mathrm{C}_{n+1}^{m+1}\right)$

又由 $\mathrm{C}_n^k=\mathrm{C}_{n-1}^k+\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$，知

$\mathrm{C}_{n+2}^{m+2}=\mathrm{C}_{n+1}^{m+2}+\mathrm{C}_{n+1}^{m+1}=\mathrm{C}_n^{m+2}+\mathrm{C}_n^{m+1}+\mathrm{C}_{n+1}^{m+1}=\cdots=\mathrm{C}_{m+2}^{m+2}+\mathrm{C}_{m+2}^{m+1}+\cdots+\mathrm{C}_{n+1}^{m+1}=\mathrm{C}_{m+1}^{m+1}+\mathrm{C}_{m+2}^{m+1}+\cdots+\mathrm{C}_{n+1}^{m+1}$，

所以，左边 = 右边.

**2016 年普通高等学校招生全国统一考试（江苏卷）**

**选填解析**

1.

【答案】$\{-1,2\}$；

【解析】由交集的定义可得 $A\cap B=\{-1,2\}$ .

2.

【答案】5；

【解析】由复数乘法可得 $z=5+5\mathrm{i}$ ，则则 $z$ 的实部是 5.

3.

【答案】$2\sqrt{10}$；

【解析】$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10}$，因此焦距为 $2c=2\sqrt{10}$ .

4.

【答案】0.1；

【解析】$\bar{x}=5.1$， $s^2=\frac{1}{5}\left(0.4^2+0.3^2+0^2+0.3^2+0.4^2\right)=0.1$ .

5.

【答案】$[-3,1]$；

【解析】$3-2x-x^2\geqslant 0$，解得 $-3\leqslant x\leqslant 1$，因此定义域为 $[-3,1]$ .

6.

【答案】9；

【解析】$a,b$ 的变化如下表：

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | 1 | 5 | 9 |
| $b$ | 9 | 7 | 5 |

则输出时 $a=9$ .

7.

【答案】$\frac{5}{6}$；

【解析】将先后两次点数记为 $(x,y)$，则共有 $6\times 6=36$ 个等可能基本事件，其中点数之和大于等于 10 有

$(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)$ 六种，则点数之和小于 10 共有 30 种，概率为 $\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$ .

8.

【答案】20；

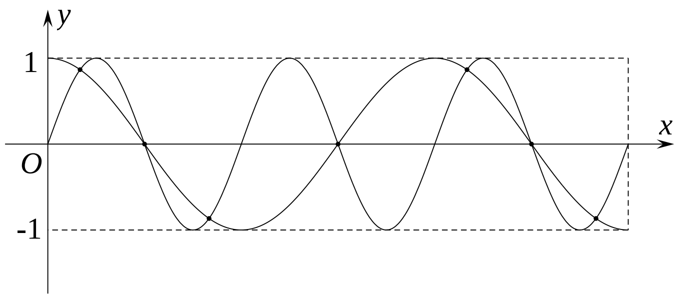
【解析】设公差为 $d$ ，则由题意可得 $a_1+\left(a_1+d\right)^2=-3$， $5a_1+10d=10$，

解得 $a_1=-4$， $d=3$，则 $a_9=-4+8\times 3=20$ .

9.

【答案】7；

【解析】画出函数图象草图，共 7 个交点．




10.

【答案】$\frac{\sqrt{6}}{3}$；

【解析】由题意得 $F(c,0)$，直线 $y=\frac{b}{2}$ 与椭圆方程联立可得 $B\left(-\frac{\sqrt{3}a}{2},\frac{b}{2}\right)$，$C\left(\frac{\sqrt{3}a}{2},\frac{b}{2}\right)$，

由 $\angle BFC=90°$ 可得 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=0$，$\overrightarrow{BF}=\left(c+\frac{\sqrt{3}a}{2},-\frac{b}{2}\right)$，$\overrightarrow{CF}=\left(c-\frac{\sqrt{3}a}{2},-\frac{b}{2}\right)$，

则 $c^2-\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{4}b^2=0$，由 $b^2=a^2-c^2$ 可得 $\frac{3}{4}c^2=\frac{1}{2}a^2$，则 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$．

11.

【答案】$-\frac{2}{5}$；

【解析】由题意得 $f\left(-\frac{5}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+a$，$f\left(\frac{9}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\left|\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{10}$，

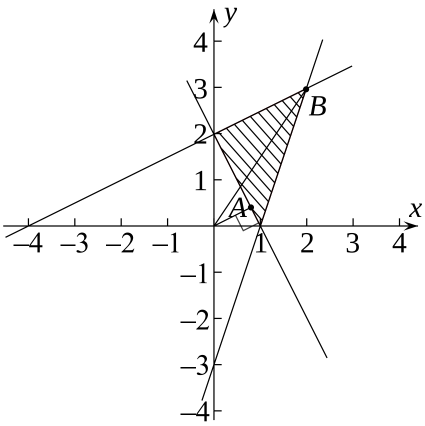
由 $f\left(-\frac{5}{2}\right)=f\left(\frac{9}{2}\right)$ 可得 $-\frac{1}{2}+a=\frac{1}{10}$，则 $a=\frac{3}{5}$，

则 $f(5a)=f(3)=f(-1)=-1+a=-1+\frac{3}{5}=-\frac{2}{5}$．

12.

【答案】$\left[\frac{4}{5},13\right]$；

【解析】在平面直角坐标系中画出可行域如下




$x^2+y^2$ 为可行域内的点到原点距离的平方.

可以看出图中 $A$ 点距离原点最近，此时距离为原点 $A$ 到直线 $2x+y-2=0$ 的距离，

$d=\frac{|-2|}{\sqrt{4+1}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，则 $\left(x^2+y^2\right)_{\min}=\frac{4}{5}$，

图中 $B$ 点距离原点最远，$B$ 点为 $x-2y+4=0$ 与 $3x-y-3=0$ 交点，则 $B(2,3)$，

则 $\left(x^2+y^2\right)_{\max}=13$.

13.

【答案】$\frac{7}{8}$；

【解析】令 $\overrightarrow{DF}=\vec{a}$，$\overrightarrow{DB}=\vec{b}$，则 $\overrightarrow{DC}=-\vec{b}$，$\overrightarrow{DE}=2\vec{a}$，$\overrightarrow{DA}=3\vec{a}$，

则 $\overrightarrow{BA}=3\vec{a}-\vec{b}$，$\overrightarrow{CA}=3\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{BE}=2\vec{a}-\vec{b}$，$\overrightarrow{CE}=2\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{BF}=\vec{a}-\vec{b}$，$\overrightarrow{CF}=\vec{a}+\vec{b}$，

则 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=9\vec{a}^2-\vec{b}^2$，$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=\vec{a}^2-\vec{b}^2$，$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}=4\vec{a}^2-\vec{b}^2$，

由 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=4$，$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=-1$ 可得 $9\vec{a}^2-\vec{b}^2=4$，$\vec{a}^2-\vec{b}^2=-1$，因此 $\vec{a}^2=\frac{5}{8},\vec{b}^2=\frac{13}{8}$，

因此 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}=4\vec{a}^2-\vec{b}^2=\frac{4\times5}{8}-\frac{13}{8}=\frac{7}{8}$.

14.

【答案】8；

【解析】由 $\sin A=\sin(\pi-A)=\sin(B+C)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，$\sin A=2\sin B\sin C$，

可得 $\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin B\sin C$（*），

由三角形 $ABC$ 为锐角三角形，则 $\cos B>0,\cos C>0$，

在（*）式两侧同时除以 $\cos B\cos C$ 可得 $\tan B+\tan C=2\tan B\tan C$，

又 $\tan A=-\tan(\pi-A)=-\tan(B+C)=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}$ (#)，

则 $\tan A\tan B\tan C=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}\times\tan B\tan C$，

由 $\tan B+\tan C=2\tan B\tan C$ 可得 $\tan A\tan B\tan C=-\frac{2\left(\tan B\tan C\right)^2}{1-\tan B\tan C}$，

令 $\tan B\tan C=t$，由 $A,B,C$ 为锐角可得 $\tan A>0,\tan B>0,\tan C>0$，

由(#)得 $1-\tan B\tan C<0$，解得 $t>1$

$\tan A\tan B\tan C=-\frac{2t^2}{1-t}=-\frac{2}{\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}}$，

$\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}=\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，由 $t>1$ 则 $0>\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}\geq-\frac{1}{4}$，因此 $\tan A\tan B\tan C$ 最小值为 $8$，

当且仅当 $t=2$ 时取到等号，此时 $\tan B+\tan C=4$，$\tan B\tan C=2$，

解得 $\tan B=2+\sqrt{2},\tan C=2-\sqrt{2},\tan A=4$（或 $\tan B,\tan C$ 互换），此时 $A,B,C$ 均为锐角.