大型公益讲座预告

时间地点	主讲老师	讲座内容
5 月 18 日周四 19:00-20:30 **丹棱大厦**	王宏斌	**二模成绩与高考志愿规划讲座** 1. 二模成绩定位； 2. 高考志愿填报规划方式与风险规避； 3. 2015 数据分析与 2016 展望； 4. 往年案例分析
6 月 23 日周四 19:00-20:30 **国家会议中心**	王宏斌	**2016 学而思高考志愿填报会** 1. 2016 年高考志愿整体形势分析； 2. 志愿填报过程中常见的五种严重失误； 3. 院校选择方法与专业选择方法； 4. 2016 年高考平行志愿的规划； 5. 往年数据分析与各层次志愿填报方案。

【微信报名】 关注“学而思高考研究中心”微信平台→
《二模成绩与高考志愿规划讲座》回复“**二模成绩**+学生姓名+联系电话”
《2016 学而思高考志愿填报会》回复“**志愿填报会**+学生姓名+联系电话”

2015 学而思高考志愿填报会 回顾

学而思高考中心政策发展办公室 王宏斌老师

国家会议中心，2700 人

北京市朝阳区高三年级第二次综合练习

数学试卷（理工类）

2016.5

一、选择题：（满分 40 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	A	B	B	C	D	A	D	C

二、填空题：（满分 30 分）

题号	9	10	11	12	13	14
答案	$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，4	3，16	6	$(-\infty,-2]\cup[0,1)$	$-n^2+19n-60$，5	$2\sqrt{2}+1$

（注：两空的填空，第一空 3 分，第二空 2 分）

三、解答题：（满分 80 分）

15.（本小题满分 13 分）

【解析】(1) 因为 $\cos 2A=1-2\sin^2 A=-\frac{1}{3}$，且 $0<A<\pi$，

所以 $\sin A=\frac{\sqrt{6}}{3}$．

因为 $c=\sqrt{3}$， $\sin A=\sqrt{6}\sin C$，

由正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，得 $a=\sqrt{6}$， $c=\sqrt{6}\times\sqrt{3}=3\sqrt{2}$．　　6 分

(2) 由 $\sin A=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$0<A<\frac{\pi}{2}$ 得 $\cos A=\frac{\sqrt{3}}{3}$．

由余弦定理 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，得 $b^2-2b-15=0$．

解得 $b=5$ 或 $b=-3$（舍）．

所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{5\sqrt{2}}{2}$．　　13 分

16.（本小题满分 13 分）

【解析】(1) 由已知可得：上班的 40 个工作日中早高峰时段中度拥堵的频率为 0.25，

据此估计此人 260 个工作日早高峰时段（早晨 7 点至 9 点）中度拥堵的天数为

$260\times 0.25=65$ 天．　　5 分

(2) 由题意可知 X 的可能取值为 30，35，40，50，70．

且 $P(X=30)=0.05$； $P(X=35)=0.10$； $P(X=40)=0.45$；

$P(X=50)=0.25$； $P(X=70)=0.15$；

所以 $EX=30\times 0.05+35\times 0.1+40\times 0.45+30\times 0.25+70\times 0.15=46$．　　13 分

17.（本小题满分 14 分）

【解析】(1) 如图 1，在等腰梯形 $ABCD$ 中，由 $BC\parallel AD$， $BC=\frac{1}{2}AD=2$， $\angle A=60^\circ$，E 为 AD 中点，所以 $\triangle ABE$ 为等边三角形．

如图 2，因为 O 为 BE 的中点，所以 $A_1O\perp BE$．

又因为平面 $A_1BE\perp$ 平面 $BCDE$，

且平面 $A_1BE\cap$ 平面 $BCDE=BE$，

所以 $A_1O\perp$ 平面 $BCDE$，所以 $A_1O\perp CE$．　　　　4 分

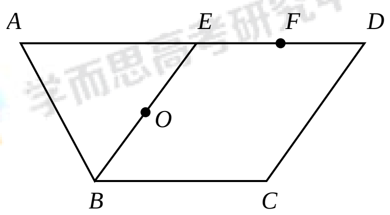

图1

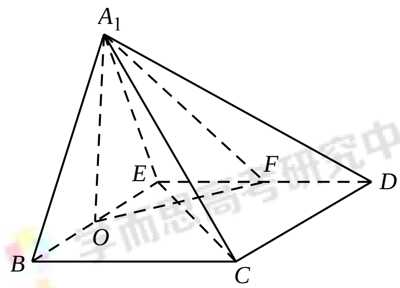

图2

⑵ 如图 3，连结 OC，由已知得 $CB=CE$，又 O 为 BE 的中点，所以 $OC\perp BE$．

由⑴知 $A_1O\perp$ 平面 $BCDE$，

所以 $A_1O\perp BE$，$A_1O\perp OC$，

所以 OA_1，OB，OC 两两垂直．

以 O 为原点，OB，OC，OA_1 分别为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系．

因为 $BC=2$，易知 $OA_1=OC=\sqrt{3}$．

所以 $A_1\left(0,0,\sqrt{3}\right)$，$B(1,0,0)$，$C\left(0,\sqrt{3},0\right)$，$E(-1,0,0)$

所以 $\overrightarrow{A_1B}=\left(1,0,-\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{A_1C}=\left(0,\sqrt{3},-\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{A_1E}=\left(-1,0,-\sqrt{3}\right)$．

设平面 A_1CE 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1E}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}\sqrt{3}y-\sqrt{3}z=0,\\ -x-\sqrt{3}z=0.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}y-z=0,\\ x+\sqrt{3}z=0.\end{cases}$

取 $z=1$，得 $\vec{n}=\left(-\sqrt{3},1,1\right)$．

设直线 A_1B 与平面 A_1CE 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=\left|\cos\left\langle\overrightarrow{A_1B},\vec{n}\right\rangle\right|=\left|\dfrac{-\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2\times\sqrt{5}}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$．

所以直线 A_1B 与平面 A_1CE 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$． 9 分

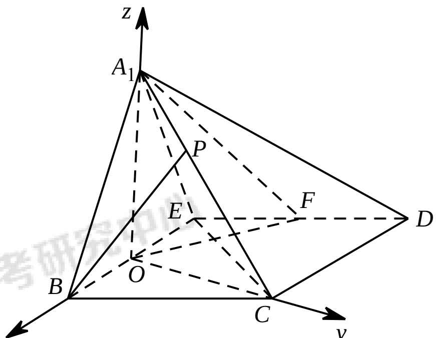

图3

⑶ 假设在侧棱 A_1C 上存在点 P，使得 BP // 平面 A_1OF．设 $\overrightarrow{A_1P}=\lambda\overrightarrow{A_1C}$，$\lambda\in[0，1]$．

因为 $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{A_1P}=\overrightarrow{BA_1}+\lambda\overrightarrow{A_1C}$，

所以 $\overrightarrow{BP}=\left(-1，0，\sqrt{3}\right)+\lambda\left(0，\sqrt{3}，-\sqrt{3}\right)=\left(-1，\sqrt{3}\lambda，\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda\right)$．

易证四边形 $BCDE$ 为菱形，且 $CE\perp BD$，

又由⑴可知，$A_1O\perp CE$，所以 $CE\perp$ 平面 A_1OF．

所以 $\overrightarrow{CE}=\left(-1，-\sqrt{3}，0\right)$ 为平面 A_1OF 的一个法向量．

由 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CE}=\left(-1，\sqrt{3}\lambda，\sqrt{3}-\sqrt{3}\lambda\right)\cdot\left(-1，-\sqrt{3}，0\right)=1-3\lambda=0$，

得 $\lambda=\frac{1}{3}\in[0，1]$．

所以侧棱 A_1C 上存在点 P，使得 BP // 平面 A_1OF，且 $\frac{A_1P}{A_1C}=\frac{1}{3}$． 14 分

18．（本小题满分 13 分）

【解析】⑴ 当 $a=3$ 时，$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+4x-2\ln x$，$x>0$．

$f'(x)=-x+4-\frac{2}{x}$．

则 $f'(1)=-1+4-2=1$，而 $f(1)=-\frac{1}{2}+4=\frac{7}{2}$．

所以曲线 C 在点 $(1，f(1))$ 处的切线方程为 $y-\frac{7}{2}=x-1$，即 $2x-2y+5=0$．

4 分

(2) 依题意当 $x\in[1,2]$ 时，曲线 C 上的点 (x,y) 都在不等式组 $\begin{cases}1\leqslant x\leqslant 2,\\ x\leqslant y,\\ y\leqslant x+\dfrac{3}{2}\end{cases}$ 所表示的平面区域内，等价于当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$x\leqslant f(x)\leqslant x+\dfrac{3}{2}$ 恒成立.

设 $g(x)=f(x)-x=-\dfrac{1}{2}x^2+ax+(1-a)\ln x$，$x\in[1,2]$.

所以 $g'(x)=-x+a+\dfrac{1-a}{x}=\dfrac{-x^2+ax+(1-a)}{x}=\dfrac{-(x-1)[x-(a-1)]}{x}$.

①当 $a-1\leqslant 1$，即 $a\leqslant 2$ 时，当 $x\in[1,2]$ 时，$g'(x)\leqslant 0$，$g(x)$ 为单调减函数，

所以 $g(2)\leqslant g(x)\leqslant g(1)$. 依题意应有 $\begin{cases}g(1)=a-\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{3}{2},\\ g(2)=-2+2a+(1-a)\ln 2\geqslant 0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a\leqslant 2,\\ a\geqslant 1.\end{cases}$ 所以 $1\leqslant a\leqslant 2$.

② 若 $1<a-1<2$，即 $2<a<3$ 时，当 $x\in[1,a-1)$，$g'(x)\geqslant 0$，$g(x)$ 为单调增函数，当 $x\in(a-1,2]$，$g'(x)<0$，$g(x)$ 为单调减函数.

由于 $g(1)>\dfrac{3}{2}$，所以不合题意.

③ 当 $a-1\geqslant 2$，即 $a\geqslant 3$ 时，注意到 $g(1)=a-\dfrac{1}{2}\geqslant\dfrac{5}{2}$，显然不合题意.

综上所述，$1\leqslant a\leqslant 2$. 13 分

19.（本小题满分 14 分）

【解析】(1) 依题意可知 $a=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{2-1}=1$，

所以椭圆 C 离心率为 $e=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 3 分

(2) 因为直线 l 与 x 轴，y 轴分别相交于 A，B 两点，所以 $x_0\neq 0$，$y_0\neq 0$.

令 $y=0$，由 $\dfrac{x_0x}{2}+y_0y=1$ 得 $x=\dfrac{2}{x_0}$，则 $A\left(\dfrac{2}{x_0},0\right)$.

令 $x=0$，由 $\dfrac{x_0x}{2}+y_0y=1$ 得 $y=\dfrac{1}{y_0}$，则 $B\left(0,\dfrac{1}{y_0}\right)$.

所以 $\triangle OAB$ 的面积 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}|OA||OB|=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{2}{x_0y_0}\right|=\dfrac{1}{|x_0y_0|}$.

因为点 $P(x_0, y_0)$ 在椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 上, 所以 $\frac{x_0^2}{2}+y_0^2=1$.

所以 $1=\frac{x_0^2}{2}+y_0^2\geqslant 2\frac{|x_0y_0|}{\sqrt{2}}$. 即 $|x_0y_0|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，则 $\frac{1}{|x_0y_0|}\geqslant\sqrt{2}$.

所以 $S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}|OA||OB|=\frac{1}{|x_0y_0|}\geqslant\sqrt{2}$.

当且仅当 $\frac{x_0^2}{2}=y_0^2$，即 $x_0=\pm1$，$y_0=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时，$\triangle OAB$ 面积的最小值为 $\sqrt{2}$.

9 分

(3)①当 $x_0=0$ 时，$P(0, \pm1)$.

当直线 $l:y=1$ 时，易得 $Q(-1, 2)$，此时 $k_{F_2P}=-1$，$k_{F_2Q}=-1$.

因为 $k_{F_2Q}=k_{F_2P}$，所以三点 Q，P，F_2 共线.

同理，当直线 $l:y=-1$ 时，三点 Q，P，F_2 共线.

②当 $x_0\neq0$ 时，设点 $Q(m, n)$，因为点 Q 与点 F_1 关于直线 l 对称，

所以 $\begin{cases}\frac{x_0}{2}\cdot\frac{m-1}{2}+y_0\cdot\frac{n}{2}=1,\\ \frac{\frac{n}{2}-0}{\frac{m-1}{2}+1}\cdot\left(-\frac{x_0}{2y_0}\right)=-1.\end{cases}$ 整理得 $\begin{cases}x_0m+2y_0n-x_0-4=0,\\ 2y_0m-x_0n+2y_0=0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}m=\frac{x_0^2+4x_0-4y_0^2}{4y_0^2+x_0^2},\\ n=\frac{4x_0y_0+8y_0}{4y_0^2+x_0^2}\end{cases}$

所以点 $Q\left(\frac{x_0^2+4x_0-4y_0^2}{4y_0^2+x_0^2}, \frac{4x_0y_0+8y_0}{4y_0^2+x_0^2}\right)$.

又因为 $\overrightarrow{F_2P}=(x_0-1, y_0)$，$\overrightarrow{F_2Q}=\left(\frac{x_0^2+4x_0-4y_0^2}{4y_0^2+x_0^2}-1, \frac{4x_0y_0+8y_0}{4y_0^2+x_0^2}\right)$,

且 $\left(\frac{x_0^2+4x_0-4y_0^2}{4y_0^2+x_0^2}-1\right)\cdot y_0-\frac{4x_0y_0+8y_0}{4y_0^2+x_0^2}\cdot(x_0-1)$

$=y_0\cdot\frac{(4x_0-8y_0^2)-(4x_0+8)(x_0-1)}{4y_0^2+x_0^2}$

$$=y_0\cdot\frac{4x_0-8y_0^2-\left(4x_0^2+4x_0-8\right)}{4y_0^2+x_0^2}$$

$$=y_0\cdot\frac{-8y_0^2-4x_0^2+8}{4y_0^2+x_0^2}=y_0\cdot\frac{-4\left(2y_0^2+x_0^2\right)+8}{4y_0^2+x_0^2}=y_0\cdot\frac{-4\times2+8}{4y_0^2+x_0^2}=0.$$

所以 $\overline{F_2P}\parallel\overline{F_2Q}$．所以点 Q，P，F_2 三点共线．

综上所述，点 Q，P，F_2 三点共线．　　　　14 分

20．（本小题满分 13 分）

【解析】⑴ 当 $n=2$ 时，$S=\{1，2，3，4\}$，令 $S_1=\{1，4\}$，$S_2=\{2，3\}$，

则 $S=S_1\cup S_2$，且 $\forall x$，$y\in S_i\,(i=1，2)$，$x>y$，都有 $x-y\notin S_i$，

所以 S 具有性质 P，相应的 P 子集为 $S_1=\{1，4\}$，$S_2=\{2，3\}$．　　3 分

⑵①若 x，$y\in T\left(1\leqslant y<x\leqslant\frac{3^n-1}{2}\right)$，由已知 $x-y\notin T$，

又 $x-y\leqslant\frac{3^n-1}{2}-1<3^n$，所以 $x-y\notin T'$．所以 $x-y\notin T\cup T'$．

②若 x，$y\in T'$，可设 $x=s+3^n$，$y=r+3^n$，r，$s\in T$，且 $1\leqslant r<s\leqslant\frac{3^n-1}{2}$，

此时 $x-y=\left(s+3^n\right)-\left(r+3^n\right)=s-r\leqslant\frac{3^n-1}{2}-1<3^n$．

所以 $x-y\notin T'$，且 $x-y=s-r\notin T$．所以 $x-y\notin T\cup T'$．

③若 $y\in T$，$x=s+3^n\in T'$，$s\in T$，

则 $x-y=\left(s+3^n\right)-y=\left(s-y\right)+3^n\geqslant\left(1-\frac{3^n-1}{2}\right)+3^n=\frac{3^n+3}{2}>\frac{3^n-1}{2}$，

所以 $x-y\notin T$．

又因为 $y\in T$，$s\in T$，所以 $s-y\notin T$．所以 $x-y=\left(s+3^n\right)-y=\left(s-y\right)+3^n\notin T'$．

所以 $x-y\notin T\cup T'$．

综上，对于 $\forall x$，$y\in T\cup T'$，$x>y$，都有 $x-y\notin T\cup T'$．　　3 分

⑶ 用数学归纳法证明．

①由⑴可知当 $n=2$ 时，命题成立，即集合 S 具有性质 P．

②假设 $n=k\,(k\geqslant2)$ 时，命题成立．

即 $S=\left\{1，2，3，\cdots，\frac{3^k-1}{2}\right\}=S_1\cup S_2\cup\cdots\cup S_k$，

且 $S_i \cap S_j = \varnothing (1 \leqslant i, j \leqslant n, i \neq j)$，$\forall x$，$y \in S_i (i=1, 2, \cdots, k)$，$x > y$，都有 $x - y \notin S_i$．

那么当 $n = k+1$ 时，记 $S_i' = \left\{ s + 3^k \mid s \in S_i \right\}$，$i = 1, 2, \cdots, k$，

并构造如下 $k+1$ 个集合：$S_1' = S_1 \cup S_1'$，$S_2' = S_2 \cup S_2'$，…，$S_k' = S_k \cup S_k'$，

$$S_{k+1}' = \left\{ \frac{3^k - 1}{2} + 1, \frac{3^k - 1}{2} + 2, \cdots, 2 \times \frac{3^k - 1}{2} + 1 \right\},$$

显然 $S_i' \cap S_j' = \varnothing (i \neq j)$．

又因为 $\dfrac{3^{k+1} - 1}{2} = 3 \times \dfrac{3^k - 1}{2} + 1$，

所以 $S_1' \cup S_2' \cup \cdots \cup S_k' \cup S_{k+1}' = \left\{ 1, 2, 3, \cdots, \dfrac{3^{k+1} - 1}{2} \right\}$．

下面证明 S_i' 中任意两个元素之差不等于 S_i' 中的任一元素（$i = 1, 2, \cdots, k+1$）．

1）若两个元素 $\dfrac{3^k - 1}{2} + r$，$\dfrac{3^k - 1}{2} + s \in S_{k+1}'$，$1 \leqslant r < s \leqslant \dfrac{3^k - 1}{2} + 1$，

则 $\left(\dfrac{3^k - 1}{2} + s \right) - \left(\dfrac{3^k - 1}{2} + r \right) = s - r \leqslant \dfrac{3^k - 1}{2}$，

所以 $\left(\dfrac{3^k - 1}{2} + s \right) - \left(\dfrac{3^k - 1}{2} + r \right) \notin S_{k+1}'$．

2）若两个元素都属于 $S_i' = S_i \cup S_i' (1 \leqslant i \leqslant k)$，

由⑵可知，S_i' 中任意两个元素之差不等于 S_i' 中的任一数（$i = 1, 2, \cdots, k+1$）．

从而，$n = k+1$ 时命题成立．

综上所述，对任意正整数 $n \geqslant 2$，集合 S 具有性质 P．　　13 分