

北京市东城区 2015-2016 学年度第二学期高三综合练习（一）

2016.4

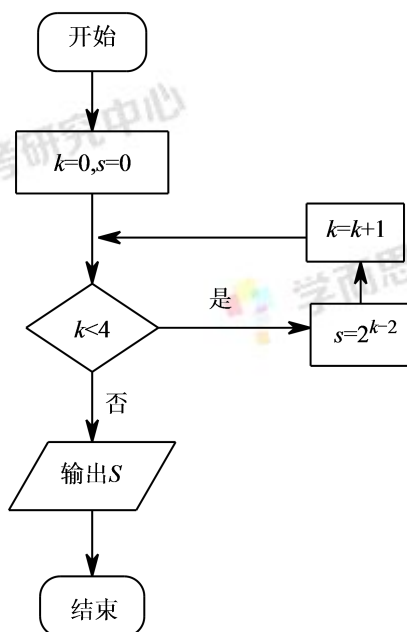
数学（理科）

本试卷共 5 页，共 150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第 I 卷（选择题共 40 分）

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项）

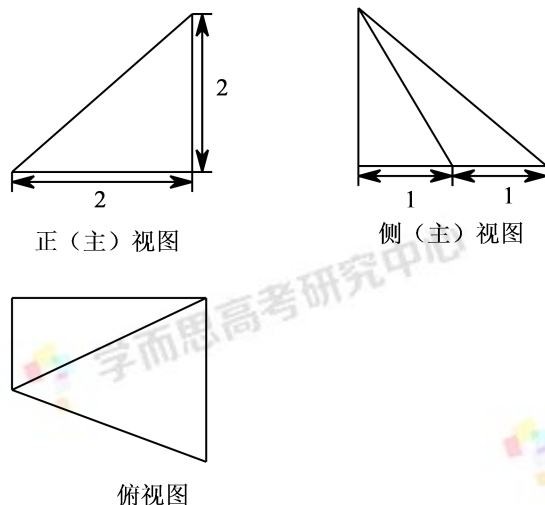
- 已知复数 $i \cdot (1+ai)$ 为纯虚数，那么实数 a 的值为
A. -1 B. 0 C. 1 D. 2
- 集合 $A = \{x | x \leq a\}$ ， $B = \{x | x^2 - 5x < 0\}$ ，若 $A \cap B = B$ ，则 a 的取值范围是
A. $a \geq 5$ B. $a \geq 4$ C. $a < 5$ D. $a < 4$
- 某单位共有职工 150 名，某中高级职称 45 人，中级职称 90 人，初级职称 15 人，现采用分层抽样方法从中抽取容量为 30 的样本，则各职称人数分别为
A. 9, 18, 3 B. 10, 15, 5 C. 10, 17, 3 D. 9, 16, 5
- 执行如图所示的程序框图，输出的 S 值为
A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. 2 D. 4



- 在极坐标系中，直线 $\rho \sin \theta - \rho \cos \theta = 1$ 被曲线 $\rho = 1$ 截得的线段长为
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. 1 D. $\sqrt{2}$

6. 一个几何体的三视图如图所示, 那么该几何体的最长棱长为

- A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 3 D. $\sqrt{10}$



7. 已知三点 $P(5, 2)$, $F_1(-6, 0)$, $F_2(6, 0)$, 那么以 F_1 , F_2 为焦点且过点 P 的椭圆的短轴长为

- A. 3 B. 6 C. 9 D. 12

8. 已知 \vec{e}_1 , \vec{e}_2 为平面上的单位向量, \vec{e}_1 与 \vec{e}_2 的起点均为坐标原点 O , \vec{e}_1 与 \vec{e}_2 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$,

平面区域 D 由所有满足 $\overrightarrow{OP} = \lambda \vec{e}_1 + \mu \vec{e}_2$ 的点 P 组成, 其中 $\begin{cases} \lambda + \mu \leq 1 \\ \lambda \geq 0 \\ \mu \geq 0 \end{cases}$ 那么平面区域 D 的

面积为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

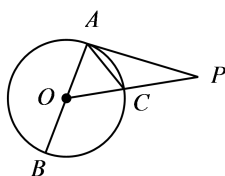
第 I 卷 (非选择题共 110 分)

二、填空题 (本大题共 6 小题, 每小题 5 分, 共 30 分)

9. 在 $\left(2x + \frac{1}{4x}\right)^5$ 的展开式中, x^3 项的系数为_____. (用数字作答)

10. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 2$, $a_3 \cdot a_4 = 32$, 那么 a_8 的值为_____.

11. 如图, 圆 O 的半径为 1, A , B , C 是圆周上的三点, 过点 A 作圆 O 的切线与 OC 的延长线交于点 P . 若 $CP = AC$, 则 $\angle COA =$ _____; $AP =$ _____.



12. 若 $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{3}{5}$, 且 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, 则 $\sin 2\alpha$ 的值为_____.

13. 某货运员拟运送甲、乙两种货物, 每件货物的体积、重量、可获利润以及运输限制如下表:

货物	体积 (升/件)	重量 (公斤/件)	利润 (元/件)
甲	20	10	8
乙	10	20	10
运输限制	110	100	

在最合理的安排下, 获得的最大利润的值为_____.

14. 已知函数 $f(x) = |\ln x|$, 关于 x 的不等式 $f(x) - f(x_0) \geq c(x - x_0)$ 的解集为 $(0, +\infty)$, c 为

常数. 当 $x_0 = 1$ 时, c 的取值范围是_____; 当 $x_0 = \frac{1}{2}$ 时, c 的值是_____.

三、解答题 (本大题共 6 小题, 共 80 分. 解答应写出文字说明, 演算步骤或证明过程)

15. (本小题共 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $BC = 2\sqrt{2}$, $AC = 2$, 且 $\cos(A+B) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

(I) 求 AB 的长度;

(II) 若 $f(x) = \sin(2x+C)$, 求 $y = f(x)$ 与直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 相邻交点间的最小距离.

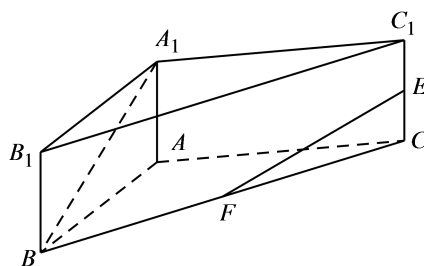
16. (本小题共 14 分)

已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $A_1A \perp$ 底面 ABC , $\angle BAC = 90^\circ$, $A_1A = 1$, $AB = \sqrt{3}$, $AC = 2$, E, F 分别为棱 C_1C, BC 的中点.

(1) 求证: $AC \perp A_1B$;

(2) 求直线 EF 与 A_1B 所成的角;

(3) 若 G 为线段 A_1A 的中点, A_1 在平面 EFG 内的射影为 H , 求 $\angle HA_1A$.



17. (本小题共 13 分)

现有两个班级，每班各出 4 名选手进行羽毛球的男单、女单、男女混合双打（混双）比赛（注：每名选手打且只打一场比赛）。根据以往的比赛经验，各项目平均完成比赛所需时间如图表所示，现只有一块比赛场地，各场比赛的出场顺序等可能。

比赛项目	男单	女单	混双
平均比赛时间	25 分钟	20 分钟	35 分钟

- (1) 求按女单、混双、男单的顺序进行比赛的概率；
- (2) 设随机变量 X 表示第三场比赛开始时需要等待的时间，求 X 的数学期望；
- (3) 若要使所有参加比赛的人等待的总时间最少，应该怎样安排比赛顺序（写出结论即可）。

18. (本小题共 14 分)

设函数 $f(x) = ae^x - x - 1$, $a \in \mathbf{R}$.

- (1) 当 $a=1$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；
- (2) 当 $x \in (0, +\infty)$ 时， $f(x) > 0$ 恒成立，求 a 的取值范围；
- (3) 求证：当 $x \in (0, +\infty)$ 时， $\ln \frac{e^x - 1}{x} > \frac{x}{2}$.

19. (本小题共 13 分)

已知抛物线 $C: y^2 = 2px$ ($p > 0$)，其焦点为 F ， O 为坐标原点，直线 AB （不垂直于 x 轴）过点 F 且抛物线 C 交于 A, B 两点，直线 OA 与 OB 的斜率之积为 $-p$.

- (1) 求抛物线 C 的方程；
- (2) 若 M 为线段 AB 的中点，射线 OM 交抛物线 C 于点 D ，求证： $\frac{|OD|}{|OM|} > 2$.

20. (本小题共 13 分)

数列 $\{a_n\}$ 中, 给定正整数 $m(m > 1)$, $V(m) = \sum_{i=1}^{m-1} |a_{i+1} - a_i|$. 定义: 数列 $\{a_n\}$ 满足

$a_{i+1} \leq a_i (i = 1, 2, \dots, m-1)$, 称数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项单调不减.

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = (-1)^n$, ($n \in \mathbf{N}^*$), 求 $V(5)$.

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = a$, $a_m = b$, ($m > 1$, $m \in \mathbf{N}^*$, $a > b$), 求证: $V(m) = a - b$ 的

充分必要条件是数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项单调不减.

(3) 给定正整数 $m(m > 1)$, 若数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_n \geq 0$, ($n = 1, 2, \dots, m$), 且数列 $\{a_n\}$

的前 m 项和为 m^2 , 求 $V(m)$ 的最大值与最小值. (写出答案即可)

(考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效)

(试卷为手动录入, 难免存在细微差错, 如您发现试卷中的问题, 敬请谅解! 转载请注明出处!)

北京市东城区高三年级第一次综合练习解析

学而思高考研究中心—曲丹、唐云、王欣研、

杜鹏、张剑、武洪姣

1. B

【解析】 $i \cdot (1 + ai) = -a + i$ ，当 $a = 0$ 时，复数为纯虚数

2. A

【解析】 $B = \{x | x^2 - 5x < 0\} = \{x | 0 < x < 5\}$ ， $A \cap B = B$ 说明 B 是 A 的子集，故 $a \geq 5$

3. A

【解析】高级职称、中级职称和初级职称的人数之比为 3:6:1，所以抽取高级职称人数为

$$\frac{3}{10} \times 30 = 9, \text{ 中级职称人数为 } \frac{6}{10} \times 30 = 18, \text{ 初级职称人数为 } \frac{1}{10} \times 30 = 3$$

4. C

【解析】 $k = 0, s = 0,$

$$k < 4, s = 2^{0-2} = \frac{1}{4}, k = 1;$$

$$k < 4, s = 2^{1-2} = \frac{1}{2}, k = 2;$$

$$k < 4, s = 2^{2-2} = 1, k = 3;$$

$$k < 4, s = 2^{3-2} = 2, k = 4;$$

$k \geq 4$, 输出 s .

所以 $s = 2$.

5. D

【解析】直线 $\rho \sin \theta - \rho \cos \theta = 1$ 对应的直角坐标系下方程为 $y - x = 1$,

曲线 $\rho = 1$ 对应的直角坐标系下的方程为 $\sqrt{x^2 + y^2} = 1$, 即 $x^2 + y^2 = 1$,

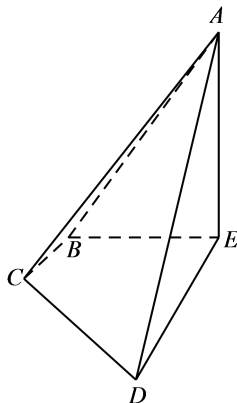
则圆 $x^2 + y^2 = 1$ 被直线 $y - x = 1$ 所截得的弦长即为所求线段长, 该弦长为 $\sqrt{2}$.

6. C

【解析】几何体如下图四棱锥 $A-BCDE$, 其中 $AE = 2, DE = 2, BC = 1, BE = 2, AE \perp BE$,
 $AE \perp DE, BE \perp CB$,

$$\therefore AB = \sqrt{AE^2 + BE^2} = 2\sqrt{2}, AD = \sqrt{AE^2 + DE^2} = 2\sqrt{2},$$

$$CD = \sqrt{CB^2 + BE^2} = \sqrt{5}, AC = \sqrt{BC^2 + AB^2} = 3, \text{ 即最长棱 } AC = 3.$$



7. B

【解析】因为点 $P(5,2)$ 在椭圆上，所以 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ 即 $|PF_2| = \sqrt{5}, |PF_1| = 5\sqrt{5}$ ，所以

$$2a = 6\sqrt{5}, a = 3\sqrt{5}, c = 6, b^2 = 9, b = 3, 2b = 6$$

8. D

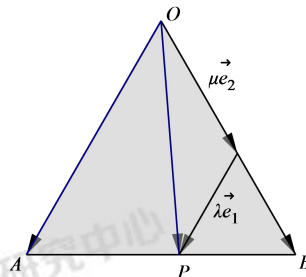
【解析】设 $\overrightarrow{OA} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OB} = \vec{e}_2$, 则 $\overrightarrow{OP} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB}$

$\lambda + \mu = 1$, 时 $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ 表示点 P 在线段 AB 上。

所以 $\lambda + \mu \leq 1, \lambda \geq 0, \mu \geq 0$ 表示点 P 在正三角形 OAB

边缘及内部, 故平面区域是以 1 为边长的正三角形, 面积为

$$\frac{\sqrt{3}}{4}$$



9. 20

【解析】 $T_{r-1} = C_5^r (2x)^{5-r} \left(\frac{1}{4x}\right)^r = C_5^r 2^{5-3r} x^{5-2r}$, 所以令 $5-2r=3, r=1$,

$$\text{所以 } C_5^r 2^{5-3r} = C_5^1 2^2 = 20$$

10. 128

【解析】 $a_3 \cdot a_4 = a_2 \cdot a_5$, 所以 $a_5 = 16$, 有因为 $a_5^2 = a_2 a_8$, 所以 $a_8 = 128$

11. $\frac{\pi}{3}, \sqrt{3}$

【解析】由题意可知 $OA \perp AP$, $\angle AOP = 2\angle CAP$ 因为 $CP = AC$, 所以 $\angle CAP = \angle CPA$

$\therefore \angle ACO = 2\angle CAP$, 即 $\angle AOP = \angle ACO$, $AO = AC$, 所以 $\triangle AOC$ 是等边三角形,

$$\angle AOC = \frac{\pi}{3}, |AP| = \sin \frac{\pi}{3} |OP| = \sqrt{3}$$

12. $\frac{7}{25}$

【解析】 $\sin 2\alpha = \cos \left[2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) \right] = \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) = 1 - 2\sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right) = 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25}$

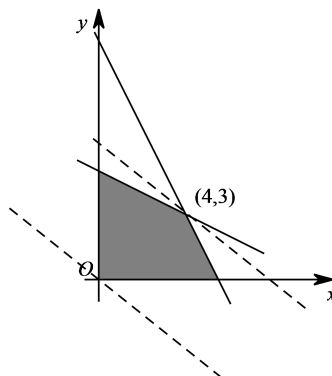
13. 62

【解析】设甲的件数为 x 件, 乙的件数为 y 件

$$\begin{cases} 20x + 10y \leq 110 \\ 10x + 20y \leq 100 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 2x + y \leq 11 \\ x + 2y \leq 10 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

求 $z = 8x + 10y$ 的最大值

由图可知 z 的最大值在 $(4,3)$ 处取得 $z = 62$



14. $[-1, 0]$, -2 .

【解析】用数形结合法.

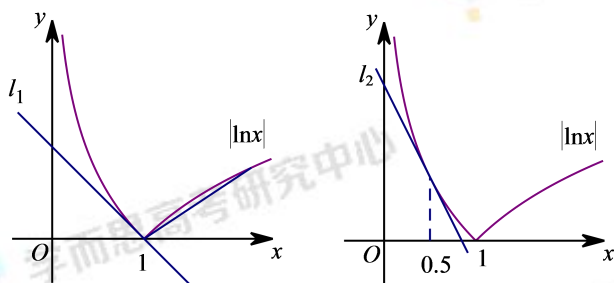
(1) 当 $x_0 = 1$ 时,

① $x > 1$ 时, 不等式即 $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \geq c$, 如图(1), 即求 $\ln x$ 上 $x > 1$ 时图象上的点与点 $(1, 0)$ 连线的斜率的最小值, 易知, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 斜率趋近于 0, 所以 $c \leq 0$;

② $x < 1$ 时, $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \leq c$, 同理, 求 $-\ln x$ 上 $x < 1$ 时图象上的点与点 $(1, 0)$ 连线的斜率的最大值, 由 $-\ln x$ 的图象性质可知, 当 $x \rightarrow 1$ 时, 斜率变大, $(-\ln x)' = -\frac{1}{x}$,

所以 $-\ln x$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线 l_1 斜率为 -1 , 于是 $c \geq -1$.

因此, $x_0 = 1$ 时, c 的取值范围为 $[-1, 0]$.



(1)

(2)

(2) 当 $x_0 = \frac{1}{2}$ 时,

① $x > \frac{1}{2}$ 时, $\frac{f(x) - f(\frac{1}{2})}{x - \frac{1}{2}} \geq c$, 如图(2), 求 $|\ln x|$ 上 $x > \frac{1}{2}$ 时图象上的点与点 $(\frac{1}{2}, \ln \frac{1}{2})$ 连线的斜率的最小值, 当 $x \rightarrow \frac{1}{2}$ 时, 斜率趋近于最小值, $|\ln x|$ 在点 $(\frac{1}{2}, \ln \frac{1}{2})$ 处的切线 l_2 斜率为 -2 , 所以 $c \leq -2$;

② $x < \frac{1}{2}$ 时, 同理可得 $c \geq -2$.

综上, 可得 $c = -2$.

15.

【解析】(1) $\because \cos C = \cos[\pi - (A + B)] = -\cos(A + B) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore C = 45^\circ$.

$\because BC = 2\sqrt{2}$, $AC = 2$,

$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos C = (2\sqrt{2})^2 + 2^2 - 8\sqrt{2} \cos 45^\circ = 4$.

$\therefore AB = 2$.

7 分

$$(2) \text{ 由 } f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{解得 } 2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \text{ 或 } 2x + \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}, \quad k \in \mathbf{Z},$$

$$\text{解得 } x_1 = k_1\pi + \frac{\pi}{24} \text{ 或 } x_2 = k_2\pi + \frac{5\pi}{24}, \quad k_1, k_2 \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{因为 } |x_1 - x_2| = \left| (k_2 - k_1)\pi + \frac{\pi}{6} \right| \geq \frac{\pi}{6}, \text{ 当 } k_1 = k_2 \text{ 时取等号,}$$

$$\text{所以当 } f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 时, 相邻两交点间最小的距离为 } \frac{\pi}{6}. \quad 13 \text{ 分}$$

16.

【解析】(1) 因为三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$, $A_1A \perp$ 底面 ABC ,

所以 $AC \perp AA_1$.

因为 $\angle BAC = 90^\circ$,

所以 $AC \perp AB$.

因为 $A_1A \cap AB = A$,

所以 $AC \perp$ 平面 A_1ABB_1 .

因为 $A_1B \subset$ 平面 A_1ABB_1 ,

所以 $AC \perp A_1B$. 4 分

(2) 如图建立空间直角坐标系 $A - xyz$,

$$\text{则 } A_1(0, 0, 1), B(\sqrt{3}, 0, 0),$$

$$E\left(0, 2, \frac{1}{2}\right), F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1, 0\right).$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{A_1B} = (\sqrt{3}, 0, -1),$$

$$\overrightarrow{EF} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{1}{2}\right).$$

$$\text{所以 } \cos \langle \overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{EF} \rangle = \frac{\overrightarrow{A_1B} \cdot \overrightarrow{EF}}{|\overrightarrow{A_1B}| \cdot |\overrightarrow{EF}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{因为 } 0^\circ < \langle \overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{EF} \rangle \leq 90^\circ,$$

所以直线 EF 与 A_1B 所成的角为 45° . 9 分

$$(3) \text{ 设 } G\left(0, 0, \frac{1}{2}\right), \text{ 则 } \overrightarrow{GE} = (0, 2, 0), \overrightarrow{GF} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right).$$

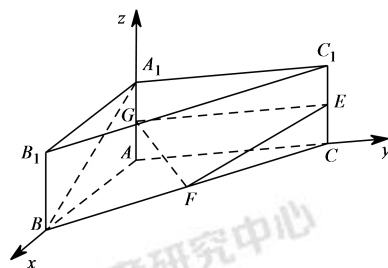
AH 所在直线的向量与平面 GEF 的法向量平行.

设平面 GEF 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{因为 } \begin{cases} \vec{n} \perp \overrightarrow{GE}, \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{GF}, \end{cases}$$

$$\text{所以 } \begin{cases} 2y = 0, \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + y - \frac{1}{2}z = 0. \end{cases}$$

$$\text{令 } z = \sqrt{3}, \text{ 则 } \vec{n} = (1, 0, \sqrt{3}).$$



所以 AH 所在直线的单位向量为 $\vec{e} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$.

因为 $\overrightarrow{AA_1} = (0, 0, 1)$,

所以 $\cos \langle \overrightarrow{AA_1}, \vec{e} \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

因为 $0 < \langle \overrightarrow{AA_1}, \vec{e} \rangle < \pi$,

所以 $\angle HA_1A = \frac{\pi}{6}$.

14 分

17.

【解析】(1) 三场比赛共有 $A_3^3 = 6$ 种方式, 其中按女单、混双、男单的顺序进行比赛只有 1

种, 所以按女单、混双、男单的顺序进行比赛的概率为 $\frac{1}{6}$. 3 分

(2) 令 A 表示女单比赛、 B 表示男单比赛、 C 表示混双比赛.

按 ABC 顺序进行比赛, 第三场比赛等待的时间是 $t_1 = 20 + 25 = 45$ (分钟).

按 ACB 顺序进行比赛, 第三场比赛等待的时间是 $t_2 = 20 + 35 = 55$ (分钟).

按 BAC 顺序进行比赛, 第三场比赛等待的时间是 $t_3 = 20 + 25 = 45$ (分钟).

按 BCA 顺序进行比赛, 第三场比赛等待的时间是 $t_4 = 35 + 25 = 60$ (分钟).

按 CAB 顺序进行比赛, 第三场比赛等待的时间是 $t_5 = 35 + 20 = 55$ (分钟).

按 CBA 顺序进行比赛, 第三场比赛等待的时间是 $t_6 = 35 + 25 = 60$ (分钟).

且上述六个事件是等可能事件, 每个事件发生概率为 $\frac{1}{6}$.

X	45	55	66
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

所以平均等待时间为 $E(X) = \frac{45 + 45 + 55 + 55 + 60 + 60}{6} = \frac{160}{3}$. 11 分

(3) 按照混双、女单、男单的顺序参加比赛, 可使等待的总时间最少. 13 分

18.

【解析】(1) 当 $a=1$ 时, 则 $f(x) = e^x - x - 1$,

则 $f'(x) = e^x - 1$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\searrow	0	\nearrow

所以当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减;

当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $x = 0$ 时, $f(x)_{\min} = f(0) = 0$.

4 分



(2) 因为 $e^x > 0$,

所以 $f(x) = ae^x - x - 1 > 0$ 恒成立, 等价于 $a > \frac{x+1}{e^x}$ 恒成立.

设 $g(x) = \frac{x+1}{e^x}$, $x \in [0, +\infty)$,

得 $g'(x) = \frac{e^x - (x+1)e^x}{e^{2x}} = \frac{-x}{e^x}$,

当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $g'(x) \leq 0$,

所以 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $x \in (0, +\infty)$ 时, $g(x) < g(0) = 1$.

因为 $a > \frac{x+1}{e^x}$ 恒成立,

所以 $a \in [1, +\infty)$.

11 分

(3) 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\ln \frac{e^x - 1}{x} > \frac{x}{2}$, 等价于 $e^x - xe^{\frac{x}{2}} - 1 > 0$.

设 $h(x) = e^x - xe^{\frac{x}{2}} - 1$, $x \in (0, +\infty)$.

求导, 得 $h'(x) = e^x - e^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}e^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}} \left(e^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2} - 1 \right)$.

由(1)可知, $x \in (0, +\infty)$ 时, $e^x - x - 1 > 0$ 恒成立.

所以 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\frac{x}{2} \in (0, +\infty)$, 有 $e^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2} - 1 > 0$.

所以 $h'(x) > 0$.

所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $h(x) > h(0) = 0$.

因此当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\ln \frac{e^x - 1}{x} > \frac{x}{2}$.

14 分

19.

【解析】(1) 因为直线 AB 过点 F 且与抛物线 C 交于 A , B 两点, $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 直线 AB (不垂直于 x 轴) 的方程可设为

$y = k\left(x - \frac{p}{2}\right)$ ($k \neq 0$).

所以 $y_1^2 = 2px_1$, $y_2^2 = 2px_2$ ($p > 0$).

因为直线 OA 与 OB 的斜率之积为 $-p$.

所以 $\frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = -p$.

所以 $\left(\frac{y_1 y_2}{x_1 x_2}\right)^2 = p^2$, 得 $x_1 x_2 = 4$.

4 分

由 $\begin{cases} y = k\left(x - \frac{p}{2}\right), \\ y^2 = 2px, \end{cases}$ 消 y 得 $k^2 x^2 - (k^2 p + 2p)x + \frac{k^2 p^2}{4} = 0$.

其中 $\Delta = (k^2 p + 2p)^2 - k^2 p^2 k^2 > 0$.

所以 $x_1 x_2 = \frac{p^2}{4}$, $x_1 + x_2 = \frac{k^2 p + 2p}{k^2}$.

所以 $p = 4$, 抛物线 $C: y^2 = 8x$.

8 分



(2) 设 $M(x_0, y_0)$, $D(x_3, y_3)$, 因为 M 为线段 AB 的中点,

$$\text{所以 } x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{k^2 p + 2p}{2k^2} = \frac{2(k^2 + 2)}{k^2}, \quad y_0 = k(x_0 - 2) = \frac{4}{k}.$$

$$\text{所以直线 } OD \text{ 的斜率为 } k_{OD} = \frac{y_0}{x_0} = \frac{2k}{k^2 + 2}.$$

直线 OD 的方程为 $y = k_{OD}x = \frac{2k}{k^2 + 2}x$ 代入抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的方程,

$$\text{得 } x_3 = \frac{2(k^2 + 2)^2}{k^2}.$$

$$\text{所以 } \frac{x_3}{x_0} = k^2 + 2.$$

因为 $k^2 > 0$,

$$\text{所以 } \frac{|OD|}{|OM|} = \frac{x_3}{x_0} = k^2 + 2 > 2.$$

13 分

20.

【解析】(1) $V(5) = 8$. 2 分

(2) 充分性: 若数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项单调不减, 即 $a_m \leq \dots \leq a_2 \leq a_1$.

此时有:

$$V(m) = \sum_{i=1}^{m-1} |a_{i+1} - a_i| = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_{m-1} - a_m) = a_1 - a_m = a - b.$$

必要性: 反证法, 若数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项不是单调不减, 则存在 $i (1 \leq i \leq m-1)$ 使得 $a_{i+1} > a_i$, 那么

$$\begin{aligned} V(m) &= \sum_{l=1}^{m-1} |a_{l+1} - a_l| \\ &= \sum_{l=1}^{i-1} |a_{l+1} - a_l| + |a_{i+1} - a_i| + \sum_{l=i+1}^{m-1} |a_{l+1} - a_l| \\ &\geq |a_i - a_1| + (a_{i+1} - a_i) + |a_m - a_{i+1}| \\ &\geq |a_m - a_1 + a_i - a_{i+1}| + (a_{i+1} - a_i) \\ &= |a - b + a_{i+1} - a_i| + (a_{i+1} - a_i). \end{aligned}$$

由于 $a_{i+1} > a_i$, $a > b$,

所以 $|a - b + a_{i+1} - a_i| + (a_{i+1} - a_i) > a - b$, 与已知矛盾.

所以 $V(m) = a - b$ 的充分必要条件是数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项单调不减. 9 分

(3) 最小值为 0. 此时 $\{a_n\}$ 为常数列. 10 分

$$\text{最大值为 } \begin{cases} 4, & m=2, \\ 2m^2, & m>2. \end{cases}$$

当 $m=2$ 时的最大值: 此时 $a_1 + a_2 = 4 (a_1 \geq 0, a_2 \geq 0)$, 11 分

$$|a_1 - a_2| \leq |4 - 0| = 4.$$

当 $m>2$ 时的最大值: 此时 $a_1 + a_2 + \dots + a_m = m^2 (a_1, a_2, \dots, a_m \geq 0)$.

由 $|x - y| \leq |x| + |y|$, 易证 $\{a_n\}$ 的值只有是大小交替出现时, 才能让 $V(m)$ 取最大值.

不妨设 $a_{i+1} \leq a_i$, i 为奇数, $a_{i+1} \geq a_i$, i 为偶数. 当 m 为奇数时有;

$$\begin{aligned} V(m) &= \sum_{i=1}^{m-1} |a_{i+1} - a_i| \\ &= a_1 - a_2 + a_3 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_4 + \cdots + a_m - a_{m-1} \\ &= a_1 + a_m + 2 \sum_{i=2}^{m-1} a_i - 4 \sum_{i=1}^{(m-1)/2} a_{2i} \\ &\leq 2 \sum_{i=1}^m a_i = 2m^2. \end{aligned}$$

当 m 为偶数时, 同理可证.

13 分



系列班

专项突破

专项突破

高效突破

系统突破

所有专项突破班已全部放出，部分班次已满，满了就没有了。

理综

地区	学科	课程名称	课次	课时	开课日期	结课日期	上课时间	带课老师
大钟寺	综合	冲刺理综280分— 理综实验题专项突破	6	3	2016/5/24	2016/5/25	每天上午08:30-11:30	赵文乐
							每天下午13:30-16:30	高阳
							每天晚上18:00-21:00	吴海波
	综合	冲刺理综280分— 理综实验题专项突破	6	3	2016/5/24	2016/5/25	每天上午08:30-11:30	高阳
							每天下午13:30-16:30	吴海波
							每天晚上18:00-21:00	赵文乐
公主坟	综合	冲刺理综280分— 理综实验题专项突破	6	3	2016/5/8	2016/5/15	周日上午08:30-11:30	马越
							周日下午13:30-16:30	黄东强
							周日晚上18:00-21:00	张元振

还有什么科目能在两个半小时让大多同学丢100分？令人发指——理综卷平均丢分100分！

理综满分300，2015年平均分204.53，2014年平均分200.55。1分一操场，10分降一档，100分和本院校说拜拜

★ 冲刺理综280分—理综实验题专项突破 实验是理综的灵魂，拿满分难上加难

物理

地区	学科	课程名称	课次	课时	开课日期	结课日期	上课时间	带课老师
大钟寺	物理	专项突破23题	2	3	2016/5/7	2016/5/14	周六晚上18:00-21:00	吴海波
	物理	专项突破24题压轴题	2	3	2016/5/8	2016/5/15	周日下午13:30-16:30	吴海波
	物理	专项突破回归课本之最后的嘱托	2	3	2016/5/8	2016/5/15	周日上午08:30-11:30	赵玮
公主坟	物理	专项突破23题	2	3	2016/5/8	2016/5/15	周日上午08:30-11:30	刘理
	物理	专项突破24题压轴题	2	3	2016/5/7	2016/5/14	周六晚上18:00-21:00	郭嘉铭
东四十条	物理	专项突破24题压轴题	2	3	2016/5/8	2016/5/15	周日上午08:30-11:30	王荣付
西四	物理	专项突破24题压轴题	2	3	2016/5/8	2016/5/15	周日下午13:30-16:30	张立

★ 回归课本之最后的嘱托 针对人教版教材同学，上课请带全套教材

高考题一定源于课本，高考往往会变形考察我们平时不重视的课本上“演示实验”、“思考与讨论”、“做一做”模块。通过对课本的全面梳理去回顾知识，最后的查缺补漏！

★ 23题 满分18分，高考得分率仅0.4，平均仅7分

要想拿高分需着重培养应用能力

★ 24题 理科试卷中分值最高的题 满分20分，得分率仅0.3，平均6分

考查学生的推理能力、应用能力和探究能力，如此高分值，不求满分，但求拿十几分！

化学

地区	学科	课程名称	课次	课时	开课日期	结课日期	上课时间	带课老师
大钟寺	化学	专项突破28题实验探究	2	3	2016/5/8	2016/5/15	周日下午13:30-16:30	郑瑞
	化学	专项突破25题有机推断	2	3	2016/5/7	2016/5/14	周六晚上18:00-21:00	马越
公主坟	化学	专项突破25题有机推断	2	3	2016/5/8	2016/5/15	周日上午08:30-11:30	李霄君
	化学	专项突破28题实验探究	2	3	2016/5/8	2016/5/15	周日晚上18:00-21:00	贾世增
东四十条	化学	专项突破28题实验探究	2	3	2016/5/7	2016/5/14	周六晚上18:00-21:00	史英杰
西四	化学	专项突破28题实验探究	2	3	2016/5/8	2016/5/15	周日晚上18:00-21:00	朱正齐

★ 25题有机推断 满分23,平均分仅16.8

带你抓住反应条件、熟记官能团转化路径、难点个个击破

★ 28题实验探究 2015高考得分率0.54

逻辑思维能力的强化,现象与本质的完美结合,让你不在考试时唉声叹气

生物

地区	学科	课程名称	课次	课时	开课日期	结课日期	上课时间	带课老师
大钟寺	生物	专项突破29题实验探究与分析	2	3	2016/5/7	2016/5/14	周六晚上18:00-21:00	宋保民
	生物	专项突破30题遗传变异	3	3	2016/5/8	2016/5/22	周日下午13:30-16:30	高阳
公主坟	生物	专项突破易混易错题	2	3	2016/5/8	2016/5/15	周日上午08:30-11:30	孙一夫
	生物	专项突破30题遗传变异	3	3	2016/5/8	2016/5/22	周日下午13:30-16:30	孙一夫
西四	生物	专项突破30题遗传变异	3	3	2016/5/8	2016/5/22	周日上午08:30-11:30	宋保民

★ 易混易错题 高考知识点全辨析

高中生物的核心名词+核心过程+核心概念

★ 29题实验探究与分析 满分17分,平均仅10.8分

要想拿高分,需着重培养以信息获取、实验分析、实验设计为核心的实验探究能力

★ 30题遗传变异 满分17分,平均分10.3分,得分率仅为0.61

在15年高考相对降低难度的情况下,遗传题还是丢分最多,熟悉题型、深刻理解遗传原理、强化逻辑推理是高分保证

数学

地区	学科	课程名称	课次	课时	开课日期	结课日期	上课时间	带课老师
大钟寺	数学	专项突破18题导数	2	3	2016/5/8	2016/5/15	周日晚上18:00-21:00	杜鹏
	数学	专项突破19题解析几何	3	3	2016/5/7	2016/5/21	周六晚上18:00-21:00	杜鹏
	数学	专项突破19题解析几何	3	3	2016/5/8	2016/5/22	周日上午08:30-11:30	詹昊凯
	数学	专项突破8、14创新小题	2	3	2016/5/15	2016/5/22	周日下午13:30-16:30	郭化楠
	数学	专项突破20题创新大题	2	3	2016/5/15	2016/5/22	周日晚上18:00-21:00	郭化楠
	数学	用高等数学知识 秒杀高考题	2	3	2016/5/29	2016/5/29	周日上午09:00-12:00 周日下午13:00-16:00	问延炜
公主坟	数学	专项突破18题导数	2	3	2016/5/7	2016/5/14	周六晚上18:00-21:00	问延炜
	数学	专项突破19题解析几何	3	3	2016/5/8	2016/5/22	周日上午08:30-11:30	问延炜
	数学	专项突破8、14创新小题	2	3	2016/5/8	2016/5/15	周日晚上18:00-21:00	问延炜
	数学	专项突破20题创新大题	2	3	2016/5/8	2016/5/15	周日下午13:30-16:30	问延炜
东四十条	数学	专项突破18题导数	2	3	2016/5/8	2016/5/15	周日晚上18:00-21:00	张一一
	数学	专项突破19题解析几何	3	3	2016/5/8	2016/5/22	周日下午13:30-16:30	张一一
西四	数学	专项突破19题解析几何	3	3	2016/5/7	2016/5/21	周六晚上18:00-21:00	王宏斌

★18题导数 得分率0.52

就讲你最需要的分类讨论模板与不等式变形、恒成立问题转化与方程构造、图像极限与图像变化

★19题解析几何 19题第2问得分率0.28！

需要构建清晰解题思路，熟练运用计算技巧与消参规则以及常见核心条件的表达

★8、14创新小题 8题得分率0.62，14题得分率0.30

8、14题是高考数学中对知识迁移、情景创新、思维含量最大的最难小题，对考生综合解题能力要求较高

★20题创新大题 得分率0.23的压轴大题，第3问能拿满分的人不足1%

最最最最最难大题，读题与理解，常见模型解析压轴题突破技巧

★用高等数学知识秒杀高考题

重现国庆秒杀班精彩，讲授高考题中的高等数学背景，得以洞穿命题人想法，迅速找到解答问题的思路

英语

地区	学科	课程名称	课次	课时	开课日期	结课日期	上课时间	带课老师
大钟寺	英语	专项突破高考作文	3	3	2016/5/7	2016/5/21	周六晚上18:00-21:00	刘恒
	英语	专项突破阅读完形	3	3	2016/5/8	2016/5/22	周日下午13:30-16:30	刘恒
公主坟	英语	专项突破高考作文	3	3	2016/5/8	2016/5/22	周日下午13:30-16:30	马清
	英语	专项突破阅读完形	3	3	2016/5/8	2016/5/22	周日晚上18:00-21:00	马清
西四	英语	专项突破高考作文	3	3	2016/5/8	2016/5/22	周日上午08:30-11:30	马清

★ 高考作文

道尽英语满分作文的秘诀，高频场景高级句型魔鬼训练，应用文分类高分模板背诵，常年高三一线教师亲自帮你分析写作问题，提升写作水平。

★ 阅读完形

3次课搞定高考完形答题技巧训练，完成高考阅读6种题型分类训练，冲击阅读题满分

语文

地区	学科	课程名称	课次	课时	开课日期	结课日期	上课时间	带课老师
大钟寺	语文	专项突破现代文阅读	3	3	2016/5/8	2016/5/22	周日下午13:30-16:30	于玲
	语文	专项突破古诗文阅读与微写作	3	3	2016/5/7	2016/5/21	周六晚上18:00-21:00	岳斌
	语文	专项突破高考作文	3	3	2016/5/8	2016/5/22	周日上午08:30-11:30	张卡特
公主坟	语文	专项突破现代文阅读	3	3	2016/5/8	2016/5/22	周日下午13:30-16:30	张春香
	语文	专项突破古诗文阅读与微写作	3	3	2016/5/8	2016/5/22	周日晚上18:00-21:00	张春香
	语文	专项突破高考作文	3	3	2016/5/8	2016/5/22	周日晚上18:00-21:00	刘强

语言基础题放入文章里，阅读量增加
主观题新增文言文翻译、阅读探究题
作文二选一重视记叙文，新增微写作
语文加量不加时，高考难度逐年提升

做题不足补俩月，方法不对毁一生！

整体46分的客观题，北京市平均分32.5

整体104分的主观题，北京市平均分68.8

整体50分的大作文，北京市平均分36.1

☹☹☹我给市平均分拖了后腿！不！是四肢！

3节课·短时高效提分·专项突破语文短板

以上各学科分数数据来自《北京考试报》2015北京高考数据，虽说2015北京高考试卷整体难度创新低，但很多同学该得分的依旧没得到。

❖ 专项班报名方式 ❖

网上报名：登录学而思培优网<http://sbj.speiyou.com/>

现场报名：请到学而思任意服务中心报名 /

电话报名：10108899，可能占线，请耐心拨打 /